

Пример решения задачи.

Исчисление предикатов

Предикаты P и Q определены на множестве $\{a, b, c\}$.

1. Найти предикат, равносильный предикату R , но не содержащий кванторов.
2. Выяснить, может ли предикат R быть выполнимым, но не тождественно истинным.

$$R = \forall_x \exists_y P(y, x) \leftrightarrow Q(x, z)$$

Решение.

1. Решим задание для предиката $\forall_x \exists_y P(y, x) \leftrightarrow Q(x, z)$.

Вспользуемся формулой:

$$a \leftrightarrow b = \overline{a \cdot \overline{b}} \vee a \cdot b.$$

Имеем:

$$\forall_x \exists_y P(y, x) \leftrightarrow Q(x, z) = \overline{\forall_x \exists_y P(y, x) \cdot \overline{Q(x, z)}} \vee \forall_x \exists_y P(y, x) \cdot Q(x, z).$$

Вспользуемся теоремой об отрицании кванторов [1, с.198]. Получим:

$$\begin{aligned} \overline{\forall_x \exists_y P(y, x) \cdot \overline{Q(x, z)}} \vee \forall_x \exists_y P(y, x) \cdot Q(x, z) &= \exists_x \overline{\exists_y P(y, x) \cdot \overline{Q(x, z)}} \vee \forall_x \exists_y P(y, x) \cdot Q(x, z) = \\ &= \exists_x \forall_y \overline{P(y, x) \cdot \overline{Q(x, z)}} \vee \forall_x \exists_y P(y, x) \cdot Q(x, z). \end{aligned}$$

Если предикат $P(y, x_1, x_2, \dots, x_n)$ таков, что $y \in \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$, то

$$\begin{aligned} \forall_y P(y, x_1, x_2, \dots, x_n) &= P(b_1, x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge P(b_2, x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge \dots \\ &\quad \dots \wedge P(b_k, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exists_y P(y, x_1, x_2, \dots, x_n) &= P(b_1, x_1, x_2, \dots, x_n) \vee P(b_2, x_1, x_2, \dots, x_n) \vee \dots \\ &\quad \dots \vee P(b_k, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Имеем:

$$R = \exists_x \forall_y \overline{P(y, x) \cdot \overline{Q(x, z)}} \vee \forall_x \exists_y P(y, x) \cdot Q(x, z) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \exists_x (\overline{P(a,x)} \wedge \overline{P(b,x)} \wedge \overline{P(c,x)}) \cdot \overline{Q(x,z)} \vee \forall_x (P(a,x) \vee P(b,x) \vee P(c,x)) \cdot Q(x,z) = \\
 &= \left((\overline{P(a,a)} \wedge \overline{P(b,a)} \wedge \overline{P(c,a)}) \vee (\overline{P(a,b)} \wedge \overline{P(b,b)} \wedge \overline{P(c,b)}) \vee (\overline{P(a,c)} \wedge \overline{P(b,c)} \wedge \overline{P(c,c)}) \right) \cdot \overline{Q(x,z)} \vee \\
 &\vee \left((P(a,a) \vee P(b,a) \vee P(c,a)) \wedge (P(a,b) \vee P(b,b) \vee P(c,b)) \wedge (P(a,c) \vee P(b,c) \vee P(c,c)) \right) \cdot Q(x,z).
 \end{aligned}$$

Мы нашли предикат, равносильный предикату R, но не содержащий кванторов.

2. Выясним, может ли предикат R быть выполнимым, но не тождественно истинным.

$$\begin{aligned}
 &= \left((\overline{P(a,a)} \wedge \overline{P(b,a)} \wedge \overline{P(c,a)}) \vee (\overline{P(a,b)} \wedge \overline{P(b,b)} \wedge \overline{P(c,b)}) \vee (\overline{P(a,c)} \wedge \overline{P(b,c)} \wedge \overline{P(c,c)}) \right) \cdot \overline{Q(x,z)} \vee \\
 &\vee \left((P(a,a) \vee P(b,a) \vee P(c,a)) \wedge (P(a,b) \vee P(b,b) \vee P(c,b)) \wedge (P(a,c) \vee P(b,c) \vee P(c,c)) \right) \cdot Q(x,z).
 \end{aligned}$$

Пусть $P(y,x)$ - тождественно истинный предикат, тогда $\overline{P(y,x)}$ - тождественно ложный предикат. Значит, высказывание

$$\left((\overline{P(a,a)} \wedge \overline{P(b,a)} \wedge \overline{P(c,a)}) \vee (\overline{P(a,b)} \wedge \overline{P(b,b)} \wedge \overline{P(c,b)}) \vee (\overline{P(a,c)} \wedge \overline{P(b,c)} \wedge \overline{P(c,c)}) \right) \cdot \overline{Q(x,z)}$$

ложно, поскольку конъюнкция и дизъюнкция ложных высказываний ложна и выражение

$$= \left((\overline{P(a,a)} \wedge \overline{P(b,a)} \wedge \overline{P(c,a)}) \vee (\overline{P(a,b)} \wedge \overline{P(b,b)} \wedge \overline{P(c,b)}) \vee (\overline{P(a,c)} \wedge \overline{P(b,c)} \wedge \overline{P(c,c)}) \right) \cdot \overline{Q(x,z)} \vee$$

Задача скачана с сайта www.MatBuro.ru

Еще примеры: https://www.matburo.ru/ex_subject.php?p=dm

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике

$$\vee ((P(a,a) \vee P(b,a) \vee P(c,a)) \wedge (P(a,b) \vee P(b,b) \vee P(c,b)) \wedge (P(a,c) \vee P(b,c) \vee P(c,c))) \cdot Q(x,z)$$

равносильно выражению

$$((P(a,a) \vee P(b,a) \vee P(c,a)) \wedge (P(a,b) \vee P(b,b) \vee P(c,b)) \wedge (P(a,c) \vee P(b,c) \vee P(c,c))) \cdot Q(x,z)$$

или $Q(x,z)$.

Пусть $Q(a,b) = 0$, $Q(b,c) = 1$, тогда $R(a,b) = 0$, $R(b,c) = 1$. Предикат $R(x,z)$ может быть выполнен, но не тождественно истинным.

Ответ: 1.

$$(\overline{(P(a,a) \wedge P(b,a) \wedge P(c,a))} \vee \overline{(P(a,b) \wedge P(b,b) \wedge P(c,b))} \vee \overline{(P(a,c) \wedge P(b,c) \wedge P(c,c))}) \cdot \overline{Q(x,z)} \vee$$

$$\vee ((P(a,a) \vee P(b,a) \vee P(c,a)) \wedge (P(a,b) \vee P(b,b) \vee P(c,b)) \wedge (P(a,c) \vee P(b,c) \vee P(c,c))) \cdot Q(x,z);$$

2. Предикат $R(x,z)$ может быть выполнен, но не тождественно истинным.