

Решение задачи о булевой формуле

Задача. Преобразовать данную формулу так, чтобы она содержала только операции тесного отрицания, дизъюнкции и конъюнкции. Пользуясь свойствами операций дизъюнкции и конъюнкции, привести формулу к виду, не содержащему скобок.

$$(\bar{x}_1 \vee x_2) \rightarrow (\bar{x}_1 \sim x_3) \bar{x}_3$$

Решение. Будем использовать известные тождества

$$x \rightarrow y = \bar{x} \vee y, \quad \bar{\bar{x}} = x,$$

$$x \sim y = (x \cdot y) \vee (\bar{x} \cdot \bar{y}), \quad \overline{(x \cdot y)} = (\bar{x} \cdot \bar{y}), \quad \overline{(\bar{x} \cdot \bar{y})} = (x \cdot y),$$

законы Моргана (двойственности): $\overline{(x \vee y)} = (\bar{x} \cdot \bar{y})$, $\overline{(x \cdot y)} = (\bar{x} \vee \bar{y})$.

Получаем:

$$\begin{aligned} F &= (\bar{x}_1 \vee x_2) \rightarrow (\bar{x}_1 \sim x_3) \bar{x}_3 = \overline{(\bar{x}_1 \vee x_2)} \vee \left((\bar{x}_1 \cdot x_3) \vee (\bar{\bar{x}_1} \cdot \bar{x}_3) \right) \bar{x}_3 = \\ &= (\bar{\bar{x}_1} \cdot \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 x_3 \vee x_1 \bar{x}_3) \bar{x}_3 = x_1 \bar{x}_2 \vee (\bar{x}_1 x_3 \bar{x}_3 \vee x_1 x_3 \bar{x}_3) = x_1 \bar{x}_2 \vee (0 \vee x_1 \bar{x}_3) = \\ &= x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_3 = x_1 (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3). \end{aligned}$$

Получили $F = x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_3$.