

Решение системы линейных уравнений

Пример решения задачи по алгебре

Задача. Решить систему линейных уравнений тремя методами:

- 1) методом Крамера;
- 2) матричным методом;
- 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение.

1) Решим систему с помощью формул Крамера. Вычислим основной определитель системы:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= 4(-3+6) + 5(3-4) + 2(-9+6) = 12 - 5 - 6 = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Вычислим дополнительные определители, подставляя столбец свободных членов, соответственно, на место первого, второго и третьего столбца основного определителя:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= 1(-3+6) + 5(2-6) + 2(-6+9) = 3 - 20 + 6 = -11. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= 4(2-6) - 1(3-4) + 2(9-4) = -16 + 1 + 10 = -5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= 4(-9+6) + 5(9-4) + 1(-9+6) = -12 + 25 - 3 = 10. \end{aligned}$$

Тогда решение по формулам Крамера равно:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-11}{1} = -11, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-5}{1} = -5, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{10}{1} = 10.$$

Получили решение: $x_1 = -11, x_2 = -5, x_3 = 10$.

2) Решим систему средствами матричного исчисления.

Запишем систему в матричной форме: $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда ее решение имеет вид: $X = A^{-1}B$.

Найдем обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}^T$.

Определитель был вычислен в первом пункте, $|A| = 1 \neq 0$.

Найдем матрицу алгебраических дополнений:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}^T = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$\begin{aligned} X = A^{-1}B &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \\ -3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2 - 12 \\ 1 - 6 \\ -3 + 4 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3) Решим систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Поменяем местами первое и третье уравнения:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Вычитаем из второго и третьего уравнения первое, умноженное на 2.

Задача скачана с сайта www.MatBuro.ru

Еще примеры: https://www.matburo.ru/ex_ag.php?p1=aglin

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ -x_1 + 3x_2 = -4, \\ x_2 = -5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 15 + x_3 = 3, \\ -x_1 - 15 = -4, \\ x_2 = -5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -22 + 15 + x_3 = 3, \\ x_1 = -11, \\ x_2 = -5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 10, \\ x_1 = -11, \\ x_2 = -5. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = -11$, $x_2 = -5$, $x_3 = 10$