Квадратичная форма. Матрица, канонический вид

Пример решения задачи по алгебре

Задача. Найти линейное преобразование неизвестных, приводящее квадратичные формы, заданные своими матрицами, к каноническому виду. Выяснить, является ли квадратичная форма знакоопределенной.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Составляем квадратичную форму:

$$2x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2-2x_2x_3+x_3^2=$$

$$=2\left(x_1^2-\frac{1}{2}2\cdot x_1x_2+\frac{1}{4}x_2^2\right)-\frac{1}{2}x_2^2+2x_2^2-2x_2x_3+x_3^2=$$

$$=2\left(x_1-\frac{1}{2}x_2\right)^2+\frac{3}{2}x_2^2-2x_2x_3+x_3^2=$$

Делаем замену

$$\begin{cases} y_1=x_1-\frac{1}{2}x_2 \\ y_2=x_2 \\ y_3=x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1=y_1+\frac{1}{2}y_2 \\ x_2=y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$$

Матрица преобразования $(x_1,x_2,x_3)=T_1(y_1,y_2,y_3)$:

$$T_1=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Приходим к форме:

$$=2y_1^2+\frac{3}{2}y_2^2-2y_2y_3+y_3^2=2y_1^2+\frac{3}{2}\left(y_2^2-\frac{4}{3}y_2y_3\right)+y_3^2=$$

$$=2y_1^2+\frac{3}{2}\left(y_2^2-2\frac{2}{3}y_2y_3+\frac{4}{9}y_3^2\right)-\frac{3}{2}\frac{4}{9}y_3^2+y_3^2=$$

$$=2y_1^2+\frac{3}{2}\left(y_2-\frac{2}{3}y_3\right)^2+\frac{1}{3}y_3^2=$$

Делаем замену:

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 - \frac{2}{3} y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 + \frac{2}{3} z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$$

Матрица преобразования $(y_1, y_2, y_3) = T_2 * (z_1, z_2, z_3)$:

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Квадратичная форма принимает вид:

$$= 2z_1^2 + \frac{3}{2} z_2^2 + \frac{1}{3} z_3^2 = f(z).$$

Она знакоопределенная (положительно определенная).

При этом преобразование задается матрицей $(x_1, x_2, x_3) = T_1 * T_2 * (z_1, z_2, z_3) = T * (z_1, z_2, z_3)$

$$T = T_1 * T_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$