Действия с матрицами

Пример решения задачи по алгебре

Задача. *Для данной матрицы A, приведенной для каждого варианта в приложении 1, требуется:*
А) вычислить определитель матрицы A;
Б) вычислить след матрицы A;
В) найти (если это возможно) матрицу, обратную к матрице A;
Г) найти базис и ранг системы векторов – строк матрицы A;
Д) определить ранг матрицы A;
Е) найти собственные значения матрицы A и соответствующие им собственные векторы.

$$A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 7\\ 1 & -4 & 9\\ -4 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

Решение.
а) Вычислим определитель матрицы A.

$$|A|=\begin{vmatrix}4 & -5 & 7\\ 1 & -4 & 9\\ -4 & 0 & 5\end{vmatrix}=-4\begin{vmatrix}-5 & 7\\ -4 & 9\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}4 & -5\\ 1 & -4\end{vmatrix}=-4(-45+28)+5(-16+5)=68-55=13\neq 0.$$

б) Вычислим след матрицы A: $trace(A)=4+(-4)+5=5$.

в) Найдем матрицу, обратную к матрице A. Она существует, так как матрица A невырожденная (определитель не равен нулю).

Используем формулу $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}^T$.

Найдем матрицу алгебраических дополнений:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}-4 & 9\\ 0 & 5\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 9\\ -4 & 5\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -4\\ -4 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-5 & 7\\ 0 & 5\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & 7\\ -4 & 5\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}4 & -5\\ -4 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-5 & 7\\ -4 & 9\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}4 & 7\\ 1 & 9\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & -5\\ 1 & -4\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-20 & -41 & -16\\ 25 & 48 & 20\\ -17 & -29 & -11\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}^T=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}-20 & -41 & -16\\ 25 & 48 & 20\\ -17 & -29 & -11\end{pmatrix}^T=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}-20 & 25 & -17\\ -41 & 48 & -29\\ -16 & 20 & -11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-20/13 & 25/13 & -17/13\\ -41/13 & 48/13 & -29/13\\ -16/13 & 20/13 & -11/13\end{pmatrix}$$

г) Найдем базис и ранг системы векторов – строк матрицы A.
Так как определитель не равен нулю, то ранг матрицы равен 3, поэтому все строки линейно независимы, поэтому их можно выбрать в качестве базиса системы векторов-строк матрицы A:
$e_1=\begin{pmatrix}4 & -5 & 7\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}1 & -4 & 9\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 5\end{pmatrix}$.

д) Определим ранг матрицы A. Так как определитель матрицы не равен нулю, ранг матрицы равен ее размерности, то есть 3: $rank(A)=3$.

е) Найдем собственные значения матрицы A и соответствующие им собственные векторы.
Решим характеристическое уравнение:

$$A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 7\\ 1 & -4 & 9\\ -4 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}4-\lambda & -5 & 7\\ 1 & -4-\lambda & 9\\ -4 & 0 & 5-\lambda\end{vmatrix}=-4\begin{vmatrix}-5 & 7\\ -4-\lambda & 9\end{vmatrix}+(5-\lambda)\begin{vmatrix}4-\lambda & -5\\ 1 & -4-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=-4(-45+28+7\lambda)+(5-\lambda)\left(-16-4\lambda+4\lambda+\lambda^2+5\right)=$$

$$=68-28\lambda-55+11\lambda+5\lambda^2-\lambda^3=-\lambda^3+5\lambda^2-17\lambda+13=0.$$

Решая уравнение, находим действительное собственное значение $\lambda=1$ кратности 1 и еще два комплексных собственных значения $\lambda_{2,3}=2\pm 3i$.

1) $\lambda=1$. Найдем соответствующий собственный вектор.
Решаем систему:

$$\begin{cases}3x-5y+7z=0,\\ x-5y+9z=0,\\ -4x+4z=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}-5y+10z=0,\\ -5y+10z=0,\\ x=z;\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=2z,\\ x=z,\\ z=z.\end{cases}$$

Получаем собственный вектор $X_1=C_1\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$.

1) $\lambda=2+3i$. Найдем соответствующий собственный вектор.
Решаем систему:

$$\begin{cases} (2-3i)x-5y+7z=0, \\ x+(-6-3i)y+9z=0, \\ -4x+(3-3i)z=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2-3i)\dfrac{3}{4}(1-i)z-5y+7z=0, \\ \dfrac{3}{4}(1-i)z+(-6-3i)y+9z=0, \\ x=\dfrac{3}{4}(1-i)z, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{5}{4}(5-3i)z-5y=0, \\ \dfrac{1}{4}(39-3i)z+(-6-3i)y=0, \\ x=\dfrac{3}{4}(1-i)z, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{4}(5-3i)z, \\ z=z, \\ x=\dfrac{3}{4}(1-i)z, \end{cases}$$

Получаем собственный вектор $X_2=C_2\begin{pmatrix} 3/4(1-i) \\ 1/4(5-3i) \\ 1 \end{pmatrix}$.

1) $\lambda=2-3i$. Найдем соответствующий собственный вектор.
Решаем систему:

$$\begin{cases} (2+3i)x-5y+7z=0, \\ x+(-6+3i)y+9z=0, \\ -4x+(3+3i)z=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2+3i)\dfrac{3}{4}(1+i)z-5y+7z=0, \\ \dfrac{3}{4}(1+i)z+(-6+3i)y+9z=0, \\ x=\dfrac{3}{4}(1+i)z, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{5}{4}(5+3i)z-5y=0, \\ \dfrac{1}{4}(39+3i)z+(-6+3i)y=0, \\ x=\dfrac{3}{4}(1+i)z, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}(5+3i)z, \\ z = z, \\ x = \frac{3}{4}(1+i)z, \end{cases}$$

Получаем собственный вектор $X_3 = C_3 \begin{pmatrix} 3/4(1+i) \\ 1/4(5+3i) \\ 1 \end{pmatrix}$.