Алгебра. Решение СЛАУ методом Гаусса

Пример решения задачи

Задача. *Используя теорему Кронекера-Капелли, доказать совместность системы линейных уравнений*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + x_4 = 7. \end{cases}$$

Найти общее решение методом Гаусса и какое-либо частное решение.

Решение. Нужно найти ранг системы и сравнить с количеством неизвестных в системе. Будем искать ранг системы и одновременно решать ее, приводя расширенную матрицу системы к упрощенному виду с помощью элементарных преобразований.
Расширенная матрица системы:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim$$

Прибавляем к второй строке первую. Вычитаем из третьей строки первую, умноженную на 3. Вычитаем из четвертой строке первую.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim$$

Прибавляем к третьей строке вторую, вычитаем из четвертой строке вторую.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Получаем, что ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы системы и равен 2, значит, по теореме Кронекера-Капелли, система совместна.

В системе 4 переменных, ранг равен 2, значит, решений бесконечно много (ранг пространства решений равен 2).

Записываем систему по последней матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_2 + x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

Выражаем переменные x_1, x_4 через остальные:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_2 + x_3, \\ x_4 = 5 - 3x_2 - x_3. \end{cases}$$

Общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2C_1 + C_2, \\ x_2 = C_1, \\ x_3 = C_2, \\ x_4 = 5 - 3C_1 - C_2. \end{cases}$$

Найдем частное решение. Положим $C_1 = 1,\ C_2 = 1$. Получим:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1, \\ x_4 = 1. \end{cases}$$