Алгебра. Квадратичные формы

Пример решения задачи

Задание. *Дано уравнение кривой второго порядка. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы соответствующей квадратичной формы и использовать их для приведения уравнения кривой к каноническому виду.*
$3x^2+3y^2-4xy+6x-4y-7=0$.

Решение. Составим матрицу для квадратичной формы $3x^2+3y^2-4xy$:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения матрицы:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-(-2)^2=(3-\lambda-2)(3-\lambda+2)=(1-\lambda)(5-\lambda)=0,$$

Получаем два собственных значения $\lambda_1=1$, $\lambda_2=5$.

Найдем соответствующие собственные векторы.

$\lambda_1=1$. Получаем систему

$$\begin{cases} 2x-2y=0, \\ -2x+2y=0, \end{cases} \Rightarrow x=y.$$

Собственный вектор $r_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, нормируем его $r_1^0=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2=5$. Получаем систему

$$\begin{cases} -2x-2y=0, \\ -2x-2y=0, \end{cases} \Rightarrow x=-y.$$

Собственный вектор $r_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, нормируем его $r_2^0=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Матрица S перехода к новому базису имеет столбцами нормированные собственные вектора:

$$S=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сделаем замену координат:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=S\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Или

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - y_1), \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1). \end{cases}$$

В базисе собственных векторов квадратичная форма примет вид:
$3x^2 + 3y^2 - 4xy \to x_1^2 + 5y_1^2$.

Тогда уравнение кривой в новых координатах можно записать так:
$$x_1^2 + 5y_1^2 + 6\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - y_1) - 4\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1) - 7 = 0.$$
Упрощаем уравнение и приводим к каноническому виду:
$$x_1^2 + 5y_1^2 + \frac{6}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{6}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{4}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{4}{\sqrt{2}}y_1 - 7 = 0,$$
$$x_1^2 + 5y_1^2 + \sqrt{2}x_1 - 5\sqrt{2}y_1 - 7 = 0,$$
$$\left(x_1^2 + \sqrt{2}x_1\right) + 5\left(y_1^2 - \sqrt{2}y_1\right) = 7,$$
$$\left(x_1^2 + \sqrt{2}x_1 + \frac{1}{2}\right) + 5\left(y_1^2 - \sqrt{2}y_1 + \frac{1}{2}\right) = 10,$$
$$\left(x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 5\left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 10,$$
$$\frac{\left(x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{10} + \frac{\left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{2} = 1.$$

Получили уравнение эллипса с центром в точке $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и полуосями $a = \sqrt{10}$, $b = \sqrt{2}$.