

## Решение задачи целочисленного программирования методом ветвей и границ

**ЗАДАНИЕ.** Найти оптимальное решение задачи целочисленного линейного программирования:

$$Z = 11x_1 + 5x_2 + 4x_3 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 \leq 11, \\ 2x_1 + x_3 \leq 5, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 13, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3$  – целые числа.

**РЕШЕНИЕ.**

Используем метод ветвей и границ.

Сначала находим решение сформулированной задачи симплексным методом без учета условия целочисленности переменных. Приведем задачу к каноническому виду:

$$Z = 11x_1 + 5x_2 + 4x_3 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + x_3 + x_5 = 5, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_6 = 13, \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 6. \end{cases}$$

Опорный план  $X = (0, 0, 0, 11, 5, 13)$ . Составляем первую симплекс-таблицу:

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5	x6
x4	11	3	2	8	1	0	0
x5	5	2	0	1	0	1	0
x6	13	3	3	1	0	0	1
Z	0	-11	-5	-4	0	0	0

В последней оценочной строке есть отрицательные оценки, поэтому нужно делать шаг симплекс-метода. Выбираем столбец с наименьшей оценкой (берем столбец  $x_1$ ), а затем разрешающий элемент – по наименьшему отношению свободных членов к положительным коэффициентам столбца (строка  $x_5$ ). Результат шага запишем в таблицу (разрешающий элемент будем выделять серым).

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5	x6
x4	7/2	0	2	13/2	1	-3/2	0
x1	5/2	1	0	1/2	0	1/2	0
x6	11/2	0	3	-1/2	0	-3/2	1
Z	55/2	0	-5	3/2	0	11/2	0

В последней оценочной строке есть отрицательные оценки, поэтому нужно делать шаг симплекс-метода. Выбираем столбец с наименьшей оценкой (берем столбец  $x_2$ ), а затем

разрешающий элемент – по наименьшему отношению свободных членов к положительным коэффициентам столбца (строка  $x_4$ ). Результат шага запишем в таблицу (разрешающий элемент будем выделять серым).

Базис	План	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_2$	7/4	0	1	13/4	1/2	-3/4	0
$x_1$	5/2	1	0	1/2	0	1/2	0
$x_6$	1/4	0	0	-41/4	-3/2	3/4	1
Z	145/4	0	0	71/4	5/2	7/4	0

В последней оценочной строке нет отрицательных оценок, значит, оптимальный план найден:

$$x_1 = 5/2, x_2 = 7/4, x_3 = 0, Z_{\max} = 145/4.$$

Получили дробное решение. Выбираем переменную с дробным значением с  $x_1 = 5/2$ . Разбиваем задачу на две подзадачи (учитывая, что  $[5/2] = 2$ , в одной полагаем  $x_1 \leq 2$ , в другой -  $x_1 \geq 3$ . Решаем обе задачи.

#### Задача 1.

$$Z = 11x_1 + 5x_2 + 4x_3 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 \leq 11, \\ 2x_1 + x_3 \leq 5, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 13, \\ x_1 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Данная задача имеет нецелочисленный оптимальный план:  $x_1 = 2, x_2 = \frac{51}{22}, x_3 = \frac{1}{22}, Z_{\max} = \frac{743}{22}$ .

#### Задача 2.

$$Z = 11x_1 + 5x_2 + 4x_3 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 \leq 11, \\ 2x_1 + x_3 \leq 5, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 13, \\ x_1 \geq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Эта задача не имеет решения.

Теперь рассматриваем задачу 1, которая имеет решение, и, аналогично предыдущему случаю, разбиваем ее на две задачи.

Выбираем переменную с дробным значением с  $x_2 = 51/22$ . Разбиваем задачу на две подзадачи (учитывая, что  $[51/22] = 2$ , в одной полагаем  $x_2 \leq 2$ , в другой -  $x_2 \geq 3$ . Решаем обе задачи.

#### Задача 1-1.

$$Z = 11x_1 + 5x_2 + 4x_3 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 \leq 11, \\ 2x_1 + x_3 \leq 5, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 13, \\ x_1 \leq 2, \\ x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Данная задача имеет нецелочисленный оптимальный план:  $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = \frac{1}{8}, Z_{\max} = \frac{65}{2} = 32,5$ .

Задача 1-2.

$$Z = 11x_1 + 5x_2 + 4x_3 \rightarrow \max ,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 \leq 11, \\ 2x_1 + x_3 \leq 5, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 13, \\ x_1 \leq 2, \\ x_2 \geq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Данная задача имеет нецелочисленный оптимальный план:

$$x_1 = \frac{9}{7}, x_2 = 3, x_3 = \frac{1}{7}, Z_{\max} = \frac{208}{7} \approx 29,7.$$

Теперь рассматриваем задачу 1-1, которая имеет решение и значение целевой функции больше, чем в задаче 1-2, и, аналогично предыдущему случаю, разбиваем ее на две задачи.

Выбираем переменную с дробным значением с  $x_3 = 1/8$ . Разбиваем задачу на две подзадачи (учитывая, что  $[1/8] = 0$ , в одной полагаем  $x_3 \leq 0$ , в другой -  $x_3 \geq 1$ . Решаем обе задачи.

Задача 1-1-1.

$$Z = 11x_1 + 5x_2 + 4x_3 \rightarrow \max ,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 \leq 11, \\ 2x_1 + x_3 \leq 5, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 13, \\ x_1 \leq 2, \\ x_2 \leq 2, \\ x_3 \leq 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Данная задача имеет целочисленный оптимальный план:  $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 0, Z_{\max} = 32$ .

Задача 1-1-2.

$$Z = 11x_1 + 5x_2 + 4x_3 \rightarrow \max ,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 \leq 11, \\ 2x_1 + x_3 \leq 5, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 13, \\ x_1 \leq 2, \\ x_2 \leq 2, \\ x_3 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Данная задача имеет целочисленный оптимальный план:  $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, Z_{\max} = 15$ .

Выбираем план с наибольшим значением целевой функции. Таким образом, оптимальное целочисленное решение найдено:  $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 0, Z_{\max} = 32$ .