

Решение целочисленной задачи линейного программирования методом ветвей и границ в Excel

ЗАДАНИЕ.

Решить задачу методом ветвей и границ, решая отдельные задачи линейного нецелочисленного программирования с помощью функции "Поиск решения" в Microsoft Excel (в случае, если первая же задача ЛП выдает целочисленное решение, не позволяя ветвить задачу, немного изменить начальные условия).

Состав еды рядовых регламентируется верховной ставкой главнокомандующего, которая устанавливает нижние нормы питания в сутки по основным компонентам: 1500 килокалорий, 100 г белков, 280 г углеводов, 90 г жиров, 1 кг воды. На складах есть 4 вида продуктов, которые выдают защитникам Родины сухим пайком: лимонад, тушенка в маленьких банках, унифицированные наборы горбушек и пирожки с ежевикой. Стоимость этих четырех продуктов соответственно 12 руб., 34 руб., 3 руб. и 20 руб. Какова минимальная сумма, которую должен затратить прапорщик на питание одного солдата?

Продукты	Калории	Белки	Углеводы	Жиры	Вода
Лимонад, порция	50	0	20 г	0	480 г
Тушенка	200	60 г	10 г	30 г	10 г
Набор горбушек	150	0	50 г	5 г	0
Ягодный пирог	400	10 г	40 г	0	0

РЕШЕНИЕ.

Сначала составим экономико-математическую модель задачи.

Переменные задачи - $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ - количество продуктов каждого вида (лимонад, тушенка, набор горбушек и пирог соответственно).

Целевая функция - минимальная стоимость рациона, $F = 12x_1 + 34x_2 + 3x_3 + 20x_4 \rightarrow \min$.

Ограничения на питательность рациона возьмем из таблицы условия задачи:

$$50x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 400x_4 \geq 1500 \text{ (калорий),}$$

$$60x_2 + 10x_4 \geq 100 \text{ (белков),}$$

$$20x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 40x_4 \geq 280 \text{ (углеводов),}$$

$$30x_2 + 5x_3 \geq 90 \text{ (жиров),}$$

$$480x_1 + 10x_2 \geq 1000 \text{ (воды).}$$

Получили задачу линейного программирования:

$$F = 12x_1 + 34x_2 + 3x_3 + 20x_4 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 50x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 400x_4 \geq 1500, \\ 60x_2 + 10x_4 \geq 100, \\ 20x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 40x_4 \geq 280, \\ 30x_2 + 5x_3 \geq 90, \\ 480x_1 + 10x_2 \geq 1000, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Найдем целочисленное решение этой задачи методом ветвей и границ.

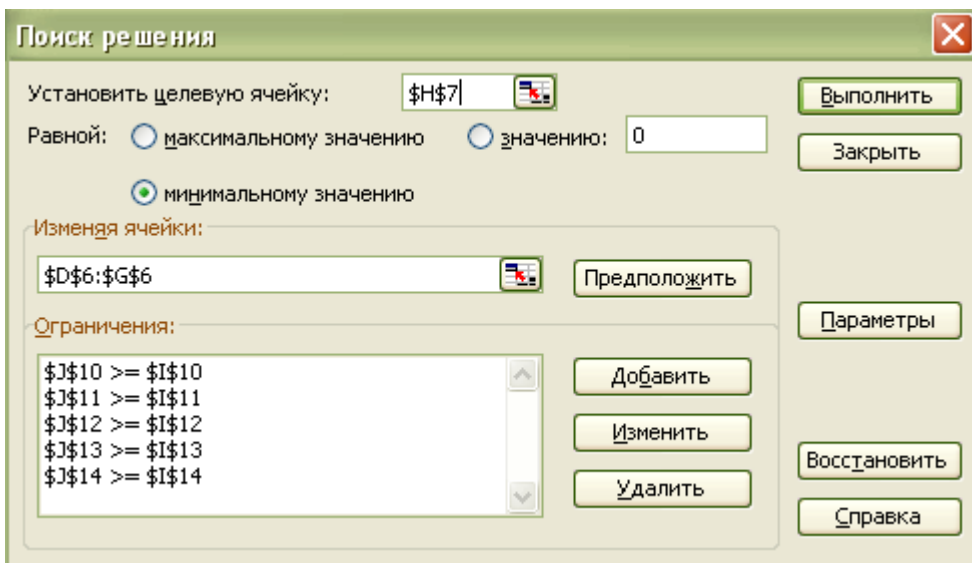
Сначала находим решение сформулированной задачи без учета условия целочисленности переменных. Используем для решения задачи надстройку «Поиск решения...» программы Excel. Первый раз приведем полные скриншоты решения, далее будем ограничиваться результатами расчетов (так как действия аналогичны).

Вносим данные в электронную таблицу.

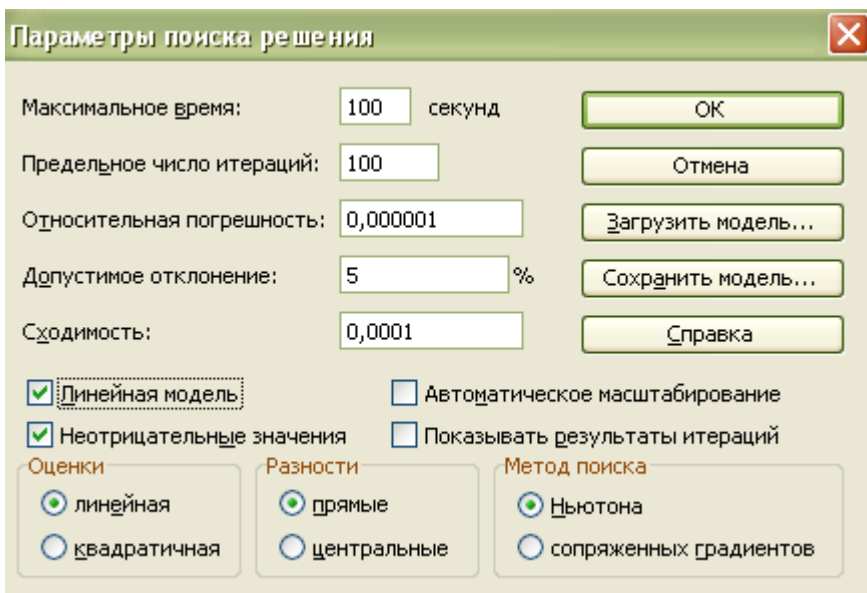
Переменные					F		
Козф. ц.ф.	12	34	3	20	0	min	
Ограничения	50	200	150	400	>=	1500	0
	0	60	0	10	>=	100	0
	20	10	50	40	>=	280	0
	0	30	5	0	>=	90	0
	480	10	0	0	>=	1000	0

Вызываем надстройку «Поиск решения» и заполняем параметры:

Вносим целевую функцию и ограничения.



Указываем линейность задачи и неотрицательность переменных:



Запускаем и получаем решение:

Переменные	2	7/144	1	2/3	8	0	F	
Козф. ц.ф.	12		34		3	20	105,25	min
Ограничения	50		200		150	400	>=	1500
	0		60		0	10	>=	100
	20		10		50	40	>=	280
	0		30		5	0	>=	90
	480		10		0	0	>=	1000

Получили дробное решение – две переменные дробные. Выберем $x_2 = 1\frac{2}{3}$.

Разбиваем задачу на две подзадачи (учитывая, что $[1\frac{2}{3}] = 1$, в одной полагаем $x_2 \leq 1$, в другой - $x_2 \geq 2$).

Получаем следующие задачи:

Задача 1.

$$F = 12x_1 + 34x_2 + 3x_3 + 20x_4 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 50x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 400x_4 \geq 1500, \\ 60x_2 + 10x_4 \geq 100, \\ 20x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 40x_4 \geq 280, \\ 30x_2 + 5x_3 \geq 90, \\ 480x_1 + 10x_2 \geq 1000, \\ x_2 \leq 1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Решаем задачу, получаем:

Переменные	2	1/16	1	12	4	F		
Козф. ц.ф.	12		34	3	20	174,75	min	
Ограничения	50		200	150	400	>=	1500	3703,125
	0		60	0	10	>=	100	100
	20		10	50	40	>=	280	811,25
	0		30	5	0	>=	90	90
	480		10	0	0	>=	1000	1000

Решение дробное. Разбиваем задачу на две задачи. Возьмем переменную. $x_1 = 2\frac{1}{16}$ и вводим две подзадачи (в одной полагаем $x_1 \leq 2$, в другой - $x_1 \geq 3$).

Получаем следующие задачи:

Задача 1.1.

$$F = 12x_1 + 34x_2 + 3x_3 + 20x_4 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 50x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 400x_4 \geq 1500, \\ 60x_2 + 10x_4 \geq 100, \\ 20x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 40x_4 \geq 280, \\ 30x_2 + 5x_3 \geq 90, \\ 480x_1 + 10x_2 \geq 1000, \\ x_2 \leq 1, \\ x_1 \leq 2, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Решаем задачу. Решения нет. Отбрасываем эту ветвь.

Задача 1.2.

$$F = 12x_1 + 34x_2 + 3x_3 + 20x_4 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 50x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 400x_4 \geq 1500, \\ 60x_2 + 10x_4 \geq 100, \\ 20x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 40x_4 \geq 280, \\ 30x_2 + 5x_3 \geq 90, \\ 480x_1 + 10x_2 \geq 1000, \\ x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 3, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Решаем задачу, получаем:

Переменные	3	1	12	4	F		
Кэф. ц.ф.	12	34	3	20	186	min	
Ограничения	50	200	150	400	>=	1500	3750
	0	60	0	10	>=	100	100
	20	10	50	40	>=	280	830
	0	30	5	0	>=	90	90
	480	10	0	0	>=	1000	1450

Решение целочисленное. $F_{\min} = 186$. Записываем данное решение. Проверяем другие ветви, пока не найдем лучшее целочисленное решение, или не остановится процесс.

Задача 2.

$$F = 12x_1 + 34x_2 + 3x_3 + 20x_4 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 50x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 400x_4 \geq 1500, \\ 60x_2 + 10x_4 \geq 100, \\ 20x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 40x_4 \geq 280, \\ 30x_2 + 5x_3 \geq 90, \\ 480x_1 + 10x_2 \geq 1000, \\ x_2 \geq 2, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Решаем задачу, получаем:

Переменные	2	1/24	2	6	47/72	0	F	
Козф. ц.ф.	12		34	3		20	112,4583	min
Ограничения	50		200	150		400	>=	1500
	0		60	0		10	>=	100
	20		10	50		40	>=	280
	0		30	5		0	>=	90
	480		10	0		0	>=	1000
								1500
								120
								393,4722
								93,26389
								1000

Решение дробное. Разбиваем задачу на две задачи. Возьмем переменную. $x_3 = 6\frac{47}{72}$ и вводим две подзадачи (в одной полагаем $x_3 \leq 6$, в другой - $x_3 \geq 7$).

Получаем следующие задачи:

Задача 2.1.

$$F = 12x_1 + 34x_2 + 3x_3 + 20x_4 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 50x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 400x_4 \geq 1500, \\ 60x_2 + 10x_4 \geq 100, \\ 20x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 40x_4 \geq 280, \\ 30x_2 + 5x_3 \geq 90, \\ 480x_1 + 10x_2 \geq 1000, \\ x_2 \geq 2, \\ x_3 \leq 6, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Решаем задачу, получаем:

Переменные	2	1/24	2	6	47/192	F		
Козф. ц.ф.	12		34	3	20	115,3958	min	
Ограничения	50		200	150	400	>=	1500	1500
	0		60	0	10	>=	100	122,4479
	20		10	50	40	>=	280	370,625
	0		30	5	0	>=	90	90
	480		10	0	0	>=	1000	1000

Задача 2.2.

$$F = 12x_1 + 34x_2 + 3x_3 + 20x_4 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 50x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 400x_4 \geq 1500, \\ 60x_2 + 10x_4 \geq 100, \\ 20x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 40x_4 \geq 280, \\ 30x_2 + 5x_3 \geq 90, \\ 480x_1 + 10x_2 \geq 1000, \\ x_2 \geq 2, \\ x_3 \geq 7, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Решаем задачу, получаем:

Переменные	2	1/24	2	7	0	F		
Козф. ц.ф.	12		34	3	20	113,5	min	
Ограничения	50		200	150	400	>=	1500	1552,083
	0		60	0	10	>=	100	120
	20		10	50	40	>=	280	410,8333
	0		30	5	0	>=	90	95
	480		10	0	0	>=	1000	1000

Обе задачи имеют дробные решения. Снова производим ветвление и находим решения получившихся задач.

Задача 2.1.1.

$$F = 12x_1 + 34x_2 + 3x_3 + 20x_4 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 50x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 400x_4 \geq 1500, \\ 60x_2 + 10x_4 \geq 100, \\ 20x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 40x_4 \geq 280, \\ 30x_2 + 5x_3 \geq 90, \\ 480x_1 + 10x_2 \geq 1000, \\ x_2 \geq 2, \\ x_3 \leq 6, \\ x_1 \leq 2, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Решаем задачу, получаем

Переменные	2	4	4	0	F		
Козф. ц.ф.	12	34	3	20	172	min	
Ограничения	50	200	150	400	>=	1500	1500
	0	60	0	10	>=	100	240
	20	10	50	40	>=	280	280
	0	30	5	0	>=	90	140
	480	10	0	0	>=	1000	1000

Получили целочисленное решение, $F_{\min} = 172$. Оно лучше предыдущего, временно принимаем его за оптимальное и исследуем остальные ветви.

Задача 2.1.2.

$$F = 12x_1 + 34x_2 + 3x_3 + 20x_4 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 50x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 400x_4 \geq 1500, \\ 60x_2 + 10x_4 \geq 100, \\ 20x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 40x_4 \geq 280, \\ 30x_2 + 5x_3 \geq 90, \\ 480x_1 + 10x_2 \geq 1000, \\ x_2 \geq 2, \\ x_3 \leq 6, \\ x_1 \geq 3, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Решаем задачу, получаем

Переменные	3	2	6	1/8	F		
Козф. ц.ф.	12	34	3	20	124,5	min	
Ограничения	50	200	150	400	>=	1500	1500
	0	60	0	10	>=	100	121,25
	20	10	50	40	>=	280	385
	0	30	5	0	>=	90	90
	480	10	0	0	>=	1000	1460

Решение дробное.

Задача 2.2.1.

$$F = 12x_1 + 34x_2 + 3x_3 + 20x_4 \rightarrow \min,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 50x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 400x_4 \geq 1500, \\ 60x_2 + 10x_4 \geq 100, \\ 20x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 40x_4 \geq 280, \\ 30x_2 + 5x_3 \geq 90, \\ 480x_1 + 10x_2 \geq 1000, \\ x_2 \geq 2, \\ x_3 \geq 7, \\ x_1 \leq 2, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{array} \right.$$

Решаем задачу, получаем

Переменные	2	4	7	0	F		
Козф. ц.ф.	12	34	3	20	181	min	
Ограничения	50	200	150	400	>=	1500	1950
	0	60	0	10	>=	100	240
	20	10	50	40	>=	280	430
	0	30	5	0	>=	90	155
	480	10	0	0	>=	1000	1000

Решение целочисленное, но значение целевой функции больше зафиксированного. Отбрасываем ветвь.

Задача 2.2.2.

$$F = 12x_1 + 34x_2 + 3x_3 + 20x_4 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 50x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 400x_4 \geq 1500, \\ 60x_2 + 10x_4 \geq 100, \\ 20x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 40x_4 \geq 280, \\ 30x_2 + 5x_3 \geq 90, \\ 480x_1 + 10x_2 \geq 1000, \\ x_2 \geq 2, \\ x_3 \geq 7, \\ x_1 \geq 3, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Решаем задачу, получаем

Переменные	3	2	7	0	F		
Козф. ц.ф.	12	34	3	20	125	min	
Ограничения	50	200	150	400	>=	1500	1600
	0	60	0	10	>=	100	120
	20	10	50	40	>=	280	430
	0	30	5	0	>=	90	95
	480	10	0	0	>=	1000	1460

Получили целочисленное решение, $F_{\min} = 125$. Оно лучше предыдущего, временно принимаем его за оптимальное и исследуем остальные ветви.

Осталась одна ветвь - задача с дробным решением и меньшим значением целевой функции.

Задача 2.1.2.

$$F = 12x_1 + 34x_2 + 3x_3 + 20x_4 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 50x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 400x_4 \geq 1500, \\ 60x_2 + 10x_4 \geq 100, \\ 20x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 40x_4 \geq 280, \\ 30x_2 + 5x_3 \geq 90, \\ 480x_1 + 10x_2 \geq 1000, \\ x_2 \geq 2, \\ x_3 \leq 6, \\ x_1 \geq 3, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Разбиваем ее на две подзадачи.

Задача 2.1.2.1.

$$F = 12x_1 + 34x_2 + 3x_3 + 20x_4 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 50x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 400x_4 \geq 1500, \\ 60x_2 + 10x_4 \geq 100, \\ 20x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 40x_4 \geq 280, \\ 30x_2 + 5x_3 \geq 90, \\ 480x_1 + 10x_2 \geq 1000, \\ x_2 \geq 2, \\ x_3 \leq 6, \\ x_1 \geq 3, \\ x_4 \leq 0, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Решаем задачу, получаем

Переменные	3	2	1/4	6	0	F		
Козф. ц.ф.	12	34	3	20		130,5	min	
Ограничения	50	200	150	400	>=	1500	1500	
	0	60	0	10	>=	100	135	
	20	10	50	40	>=	280	382,5	
	0	30	5	0	>=	90	97,5	
	480	10	0	0	>=	1000	1462,5	

Значение целевой функции больше найденного, отбрасываем ветвь.

Задача 2.1.2.2.

$$F = 12x_1 + 34x_2 + 3x_3 + 20x_4 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 50x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 400x_4 \geq 1500, \\ 60x_2 + 10x_4 \geq 100, \\ 20x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 40x_4 \geq 280, \\ 30x_2 + 5x_3 \geq 90, \\ 480x_1 + 10x_2 \geq 1000, \\ x_2 \geq 2, \\ x_3 \leq 6, \\ x_1 \geq 3, \\ x_4 \geq 1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Решаем задачу, получаем

Переменные	3	2	6	1	F		
Козф. ц.ф.	12	34	3	20	142	min	
Ограничения	50	200	150	400	>=	1500	1850
	0	60	0	10	>=	100	130
	20	10	50	40	>=	280	420
	0	30	5	0	>=	90	90
	480	10	0	0	>=	1000	1460

Решение целочисленное, но значение целевой функции больше найденного. Отбрасываем ветвь.

Ветвление закончено. Все ветви отброшены, останавливаемся на оптимальном решении вида:

Переменные	3	2	7	0	F		
Козф. ц.ф.	12	34	3	20	125	min	
Ограничения	50	200	150	400	>=	1500	1600
	0	60	0	10	>=	100	120
	20	10	50	40	>=	280	430
	0	30	5	0	>=	90	95
	480	10	0	0	>=	1000	1460

То есть: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 7$, $x_4 = 0$, $F_{\min} = 125$.