Пример решения задачи
Полное исследование функции и построение графика

Задание.

Провести полное исследование и построить график функции

$\boldsymbol{f(x)=\frac{x}{2}-\arccos\frac{2x}{1+x^2}}$

Решение.

Область определения задается условиями

$$-1\le\frac{2x}{1+x^2}\le 1$$

Учитывая, что $1+x^2>0$, получим

$$-1-x^2\le 2x\le 1+x^2 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases}x^2+2x+1\ge 0\\ x^2-2x+1\ge 0\end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases}(x+1)^2\ge 0\\ (x-1)^2\ge 0\end{cases}$$

Очевидно, что эти условия выполняются при всех x.

Область определения: $x\in(-\infty;\,+\infty)$.

$$y(-x)=\frac{-x}{2}-\arccos\frac{-2x}{1+(-x)^2}=-\frac{x}{2}-\arccos\left(-\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

$$=-\frac{x}{2}-\pi+\arccos\frac{2x}{1+x^2}$$

$$y(-x)\ne -y(x), y(-x)\ne y(x)$$

Функция общего вида, непериодическая.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{2}-\arccos\frac{2x}{1+x^2}\right)=\left|\begin{array}{c}\dfrac{2x}{1+x^2}\to 0\\ \arccos\dfrac{2x}{1+x^2}\to\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right|=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2}-\arccos\frac{2x}{1+x^2}\right)=\left|\begin{array}{c}\dfrac{2x}{1+x^2}\to 0\\ \arccos\dfrac{2x}{1+x^2}\to\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right|=+\infty$$

Горизонтальной асимптоты нет.

Функция непрерывна, вертикальных асимптот нет.

Наклонную асимптоту ищем в виде $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{2} - \arccos\frac{2x}{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\arccos\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

$$= \left|\arccos\frac{2x}{1+x^2} \to \frac{\pi}{2}\right| =$$

$$= \frac{1}{2} - 0\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2} - \arccos\frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{2}x\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(-\arccos\frac{2x}{1+x^2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Наклонная асимптота $y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}$.

Точки пересечения с осями координат.

$$x = 0 \to \quad y = 0 - \arccos 0 = -\frac{\pi}{2}$$

$$y = 0 \to \frac{x}{2} - \arccos\frac{2x}{1+x^2} = 0 \to x \approx 0.70$$

Исследуем на экстремумы.

$$y' = \left(\frac{x}{2} - \arccos\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1+x^2}{\sqrt{(1+x^2)^2 - 4x^2}}\cdot\frac{2(1+x^2) - 2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1+x^2}{\sqrt{1 - 2x^2 + x^4}}\cdot\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1+x^2}{|1-x^2|}\cdot\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{(1+x^2)}\cdot\frac{1-x^2}{|1-x^2|}$$

При $-1 < x < 1$: $y' = \frac{1}{2} + \frac{2}{(1+x^2)} > 0$, функция возрастает.

При $x < -1$ или $x > 1$:

$$y' = \frac{1}{2} - \frac{2}{(1+x^2)} = 0 \to \ 1 + x^2 = 4 \to \ x = \pm\sqrt{3}$$

При $x < -\sqrt{3}$: $y' > 0$, функция возрастает. При $-\sqrt{3} < x < -1$: $y' < 0$, функция убывает.

При $1 < x < \sqrt{3}$: $y' < 0$, функция убывает. При $x > \sqrt{3}$: $y' > 0$, функция возрастает.

Точка $x = -\sqrt{3}$ - точка максимума, $y(-\sqrt{3}) \approx -3.48$. Точка $x = \sqrt{3}$ - точка максимума, $y(\sqrt{3}) \approx 0.34$. Точки $x = \pm 1$ - точки излома (производная меняет знак, но не определена). $y(-1) \approx -3.64, y(1) = 0.5$.

Исследуем на перегибы.

$$y' = \frac{1}{2} + \frac{2}{(1+x^2)} \cdot \frac{1-x^2}{|1-x^2|} = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{2}{(1+x^2)}, & -1 < x < 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{2}{(1+x^2)}, & x < -1 \text{ или } x > 1 \end{cases}$$

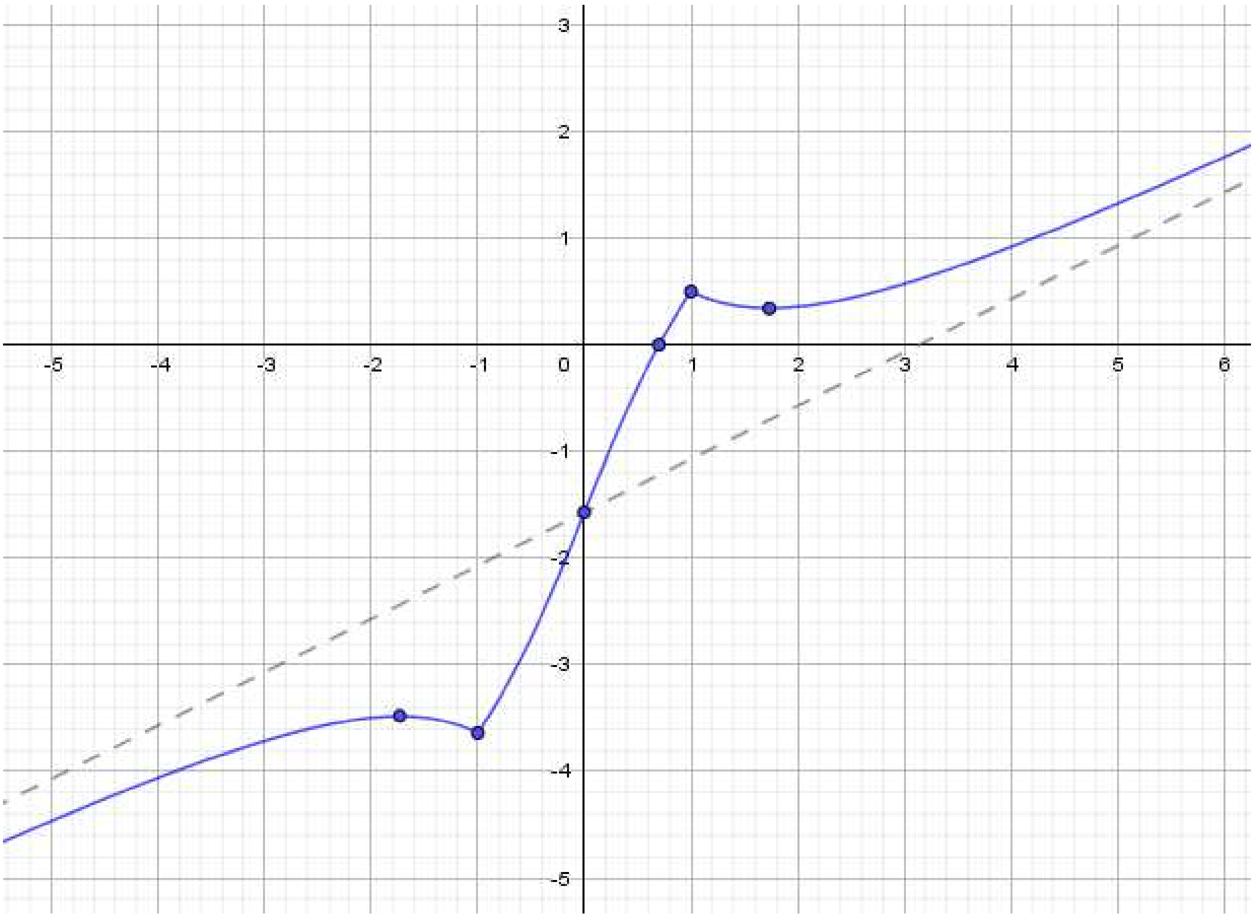
$$\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{(1+x^2)}\right)' = -\frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{(1+x^2)}\right)' = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

$$y'' = \begin{cases} -\frac{4x}{(1+x^2)^2}, & -1 < x < 1 \\ \frac{4x}{(1+x^2)^2}, & x < -1 \text{ или } x > 1 \end{cases}$$

$$y'' = 0 \to \ x = 0$$

При $x < -1$: $y'' < 0$, функция выпукла. При $-1 < x < 0$: $y'' > 0$, функция вогнута. При $0 < x < 1$: $y'' < 0$, функция выпукла. При $x > 1$: $y'' > 0$, функция вогнута. $x = 0$ - точка перегиба, $x = \pm 1$ - точки излома.


-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5