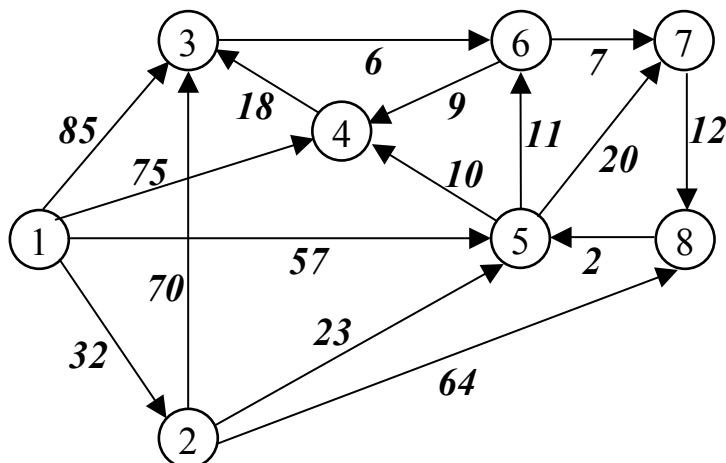


Тема: Теория графов

ЗАДАНИЕ. Найти кратчайшие пути в орграфе от первой вершины ко всем остальным, используя алгоритм Дейкстры. Постройте дерево кратчайших путей.



РЕШЕНИЕ: Найдем кратчайший путь от вершины x_1 до всех вершин, используя алгоритм Дейкстры. Он заключается в том, что вершинам графа присваиваются временные метки, которые затем по определенным правилам заменяются на постоянные метки. Будем использовать обозначения:

$L^*(x_i)$ - постоянная метка вершины x_i ,

$L^n(x_i)$ - новая временная метка вершины x_i ,

$L^c(x_i)$ - старая временная метка вершины x_i ,

R_{ij} - вес ребра, соединяющего вершины x_i и x_j .

Новая временная метка вычисляется по формуле:

$$L^n(x_j) = \min \{ L^c(x_i), R_{ij} + L^*(x_i) \}$$

После этого из всех временных меток выбирается наименьшая, и она становится постоянной меткой. Действия продолжаются, пока не будут найдены постоянные метки для всех вершин графа. Результаты действий на каждом шаге будем заносить в таблицу. В предпоследний столбец заносим вершину, получившую постоянную метку, в последний столбец – величину этой метки (для данного шага).

Шаг 1. Начальная вершина x_1 , имеет постоянную метку $L^*(x_1) = 0$, остальные вершины имеют временную метку ∞ .

Шаг 2. Определяем множество последователей вершины $\Gamma(x_1) = \{x_3, x_4, x_5, x_2\}$. Пересчитываем их временные метки по основной формуле. $L^n(x_3) = 85$, $L^n(x_4) = 75$, $L^n(x_5) = 57$, $L^n(x_2) = 32$. Берем вершину x_2 с минимальной временной меткой 32, присваиваем этой вершине постоянную метку $L^*(x_2) = 32$.

Шаг 3. Определяем множество последователей вершины $\Gamma(x_2) = \{x_3, x_5, x_8\}$. Пересчитываем их временные метки по основной формуле. $L''(x_3) = \min\{85, 32 + 70\} = 85$, $L''(x_5) = \min\{57, 32 + 23\} = 55$, $L''(x_8) = 32 + 64 = 96$. Берем вершину x_5 с минимальной временной меткой 55, присваиваем этой вершине постоянную метку $L^*(x_5) = 55$.

Шаг 4. Определяем множество последователей вершины $\Gamma(x_5) = \{x_4, x_6, x_7\}$. Пересчитываем их временные метки по основной формуле. $L''(x_4) = \min\{75, 55 + 10\} = 65$, $L''(x_6) = 55 + 11 = 66$, $L''(x_7) = 55 + 20 = 75$. Берем вершину x_4 с минимальной временной меткой 65, присваиваем этой вершине постоянную метку $L^*(x_4) = 65$.

Шаг 5. Определяем множество последователей вершины $\Gamma(x_4) = \{x_3\}$. Пересчитываем их временные метки по основной формуле. $L''(x_3) = \min\{85, 65 + 18\} = 83$. Берем вершину x_3 с минимальной временной меткой 66, присваиваем этой вершине постоянную метку $L^*(x_3) = 66$.

Шаг 6. Определяем множество последователей вершины $\Gamma(x_6) = \{x_4, x_7\}$. Пересчитываем их временные метки по основной формуле. $L''(x_7) = \min\{75, 66 + 7\} = 73$. Берем вершину x_7 с минимальной временной меткой 73, присваиваем этой вершине постоянную метку $L^*(x_7) = 73$.

Шаг 7. Определяем множество последователей вершины $\Gamma(x_7) = \{x_8\}$. Пересчитываем их временные метки по основной формуле. $L''(x_8) = \min\{96, 73 + 12\} = 85$. Берем вершину x_8 с минимальной временной меткой 83, присваиваем этой вершине постоянную метку $L^*(x_8) = 83$.

Шаг 8. Определяем множество последователей вершины $\Gamma(x_3) = \{x_6\}$. Эта вершина уже имеет постоянную метку. Поэтому берем последнюю вершину x_6 с временной меткой 85, присваиваем этой вершине постоянную метку $L^*(x_6) = 85$.

Шаги	Вершины								x_i	$L^*(x_i)$
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8		
1	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	x_1	0
2		32	85	75	57	∞	∞	∞	x_2	32
3			85	75	55	∞	∞	96	x_5	55
4			85	65		66	75	96	x_4	65
5			83			66	75	96	x_6	66
6			83				73	96	x_7	73
7			83					85	x_3	83
8								85	x_8	85

Кратчайшие пути найдены, их длина приведена в последних двух столбцах расчетной таблицы. Построим дерево кратчайших путей (ребра дерева обведены жирным) – ребра (1,2), (2,5), (5,4), (4,3), (5,6), (6,7), (7,8).

