Аналитическая геометрия. Кривые 2-го порядка
Пример решения задачи

Задача. *Даны уравнение параболы* $y=\frac{1}{4}x^2+1$ *и точка* $C(0;2)$, *которая является центром окружности. Радиус окружности* $r=5$.

Требуется найти

1) точки пересечения параболы с окружностью

2) составить уравнение касательной и нормали к параболе в точках её пересечения с окружностью

3) найти острые углы, образуемые кривыми в точках пересечения. Чертёж.

Решение.

1) Выпишем уравнение окружности с центром $C(0;2)$ и радиусом $r=5$:

$$(x-0)^2+(y-2)^2=5^2,$$
$$x^2+(y-2)^2=25,$$
$$x^2+y^2-4y-21=0.$$

Найдем точки пересечения параболы $y=\frac{1}{4}x^2+1$ с окружностью:

$$\begin{cases} x^2+y^2-4y-21=0, \\ y=\frac{1}{4}x^2+1; \end{cases}$$

$$x^2+\left(\frac{1}{4}x^2+1\right)^2-4\left(\frac{1}{4}x^2+1\right)-21=0,$$

$$\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{2}x^2-24=0,$$

Делаем замену

$$t=\frac{1}{2}x^2 \Rightarrow \frac{1}{4}t^2+t-24=0,$$
$$t^2+4t-96=0,$$
$$t=8;\ t=-12.$$

Получаем $t=\frac{1}{2}x^2=8,\ x^2=16,\ x=\pm 4$.

Тогда

$\begin{cases} x_1=4, \\ y_1=5; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-4, \\ y_2=5. \end{cases}$

Получили две точки: (4,5) и (-4,5).

2) Составим уравнение касательной и нормали к параболе $y=\frac{1}{4}x^2+1$ в точках её пересечения с окружностью.

Уравнение касательной в точке $(x_0, y(x_0))$ имеет вид:

$y=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)$.

Найдем производную:

$y'=\left(\frac{1}{4}x^2+1\right)'=\frac{1}{2}x$.

В точке (4,5) получаем: $y'(4)=\frac{1}{2}4=2$.

Подставляем все в уравнение и получаем уравнение касательной:

$y=5+2(x-4),$
$y=2x-3.$

В точке (-4,5) получаем: $y'(-4)=\frac{1}{2}(-4)=-2$.

Подставляем все в уравнение и получаем уравнение касательной:

$y=5-2(x+4),$
$y=-2x-3.$

3) Найдем острые углы, образуемые кривыми в точках пересечения.
Для этого найдем угловые коэффициенты касательных к параболе (уже найдены выше, $q_1=2,\ q_2=-2$) и к окружности, тогда угол между кривыми будет определен как угол между соответствующими касательными.
Вычисляем производную от $x^2+(y-2)^2=25,$:

$$2x+2(y-2)y'=0,$$
$$y'=-\frac{x}{y-2}$$

В точке (4,5) находим $k_1=y'(4)=-\frac{4}{5-2}=-\frac{4}{3}$.

В точке (-4,5) находим $k_2=y'(-4)=-\frac{-4}{5-2}=\frac{4}{3}$.

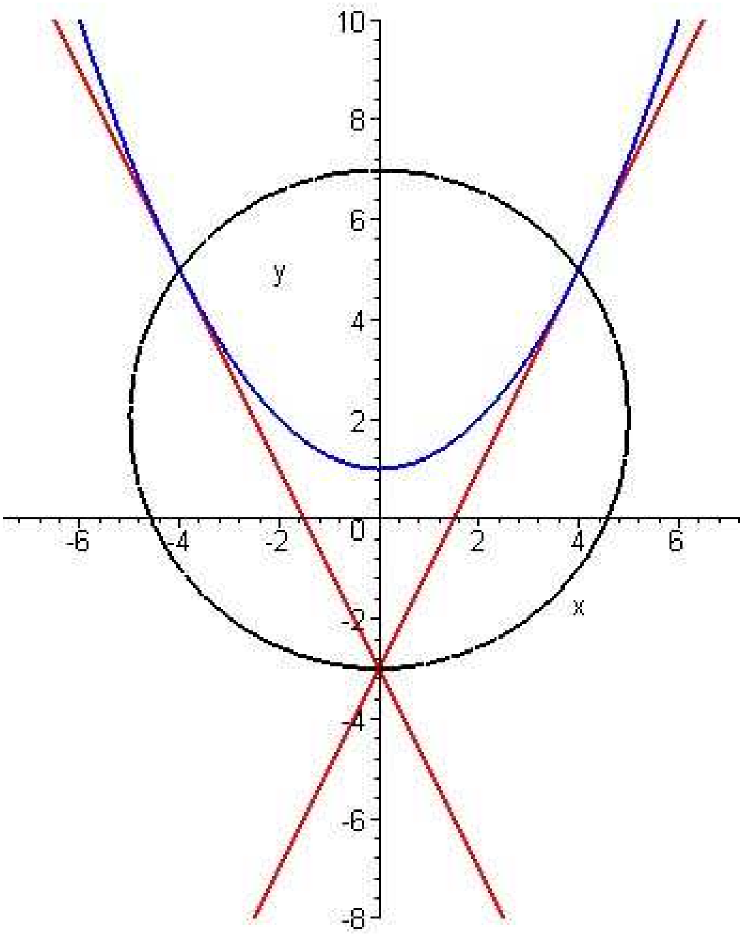
Угол φ между касательными найдем по формуле:

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{k_1-q_1}{1+k_1\cdot q_1}\right|=\left|\frac{-4/3-2}{1+(-4/3)\cdot 2}\right|=2,\ \varphi=\operatorname{arctg}2\approx 63,4^0$$

Второй угол будет такой же в силу симметрии:

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{k_2-q_2}{1+k_2\cdot q_2}\right|=\left|\frac{4/3+2}{1+4/3\cdot(-2)}\right|=2,\ \varphi=\operatorname{arctg}2\approx 63,4^0$$

Сделаем чертёж.



Черным – окружность, синим – парабола, красным – касательные к параболе.