Аналитическая геометрия. Кривые 2-го порядка
Пример решения задачи

Задача. *Составить уравнение кривой, для каждой точки которой отношение расстояния до точки* $F(0;10)$ *к расстоянию до прямой* $x=-4$ *равно* $\sqrt{\frac{2}{5}}$. *Привести это уравнение к каноническому виду и определить тип кривой.*

Решение. Пусть $M(x,y)$ - произвольная точка искомой кривой. Тогда расстояние до точки $F(0;10)$ равно: $d_1=\sqrt{x^2+(y-10)^2}$. Расстояние до прямой $x=-4$ равно $d_2=|x+4|$. По условию отношение этих расстояний равно $\sqrt{\frac{2}{5}}$, то есть

$$\frac{\sqrt{x^2+(y-10)^2}}{|x+4|}=\sqrt{\frac{2}{5}},$$

Возводим обе части в квадрат:

$$\frac{x^2+y^2-20y+100}{x^2+8x+16}=\frac{2}{5},$$

$$5\left(x^2+y^2-20y+100\right)=2\left(x^2+8x+16\right),$$

$$5x^2+5y^2-100y+500=2x^2+16x+32,$$

$$3x^2+5y^2-100y-16x=32-500,$$

$$3\left(x^2-16/3x\right)+5\left(y^2-20y\right)=-468,$$

$$3\left(x^2-16/3x+64/9\right)+5\left(y^2-20y+100\right)=-468+64/3+500,$$

$$3\left(x-8/3\right)^2+5\left(y-10\right)^2=160/3,$$

$$\frac{\left(x-8/3\right)^2}{160/9}+\frac{\left(y-10\right)^2}{160/15}=1.$$

Это каноническое уравнение эллипса с центром в точке $M(8/3;10)$ и полуосями $a=\sqrt{160/9}=\frac{4}{3}\sqrt{10}$, $b=\sqrt{160/15}=\frac{4}{3}\sqrt{6}$.