Аналитическая геометрия. Кривые 2-го порядка
Пример решения задачи

Задача. *Общее уравнение кривой второго порядка привести к каноническому. Найти координаты центра, координаты вершин и фокусов. Написать уравнения асимптот и директрис. Построить линии на графики, отметить точки.*

$9x^2+25y^2-18x-100y-116=0$.

Решение. Приводим уравнение кривой к каноническому виду, выделяя полные квадраты:

$$9x^2+25y^2-18x-100y-116=0,$$
$$\left(9x^2-18x\right)+\left(25y^2-100y\right)=116,$$
$$9\left(x^2-2x\right)+25\left(y^2-4y\right)=116,$$
$$9\left(x^2-2x+1\right)+25\left(y^2-4y+4\right)=116+9+100,$$
$$9(x-1)^2+25(y-2)^2=225,$$
$$\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1,$$
$$\frac{(x-1)^2}{5^2}+\frac{(y-2)^2}{3^2}=1.$$

Получили $\frac{(x-1)^2}{5^2}+\frac{(y-2)^2}{3^2}=1.$

Это уравнение эллипса с центром в точке $(1;2)$ и полуосями $a=5$, $b=3$.

Вершины в точках

$$A_1(1+5;2)=A_1(6;2),$$
$$A_2(1-5;2)=A_2(-4;2),$$
$$A_3(1;2-3)=A_3(1;-1),$$
$$A_4(1;2+3)=A_4(1;5).$$

Оси симметрии для кривой: $x=1,\ y=2$.

(см. чертеж серым).

Директрисы эллипса:

$$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}+1=\pm\frac{5}{4/5}+1=\pm\frac{25}{4}+1,$$
$$x_1=\frac{29}{4},\ x_2=-\frac{21}{4}.$$

(см. чертеж коричневым).

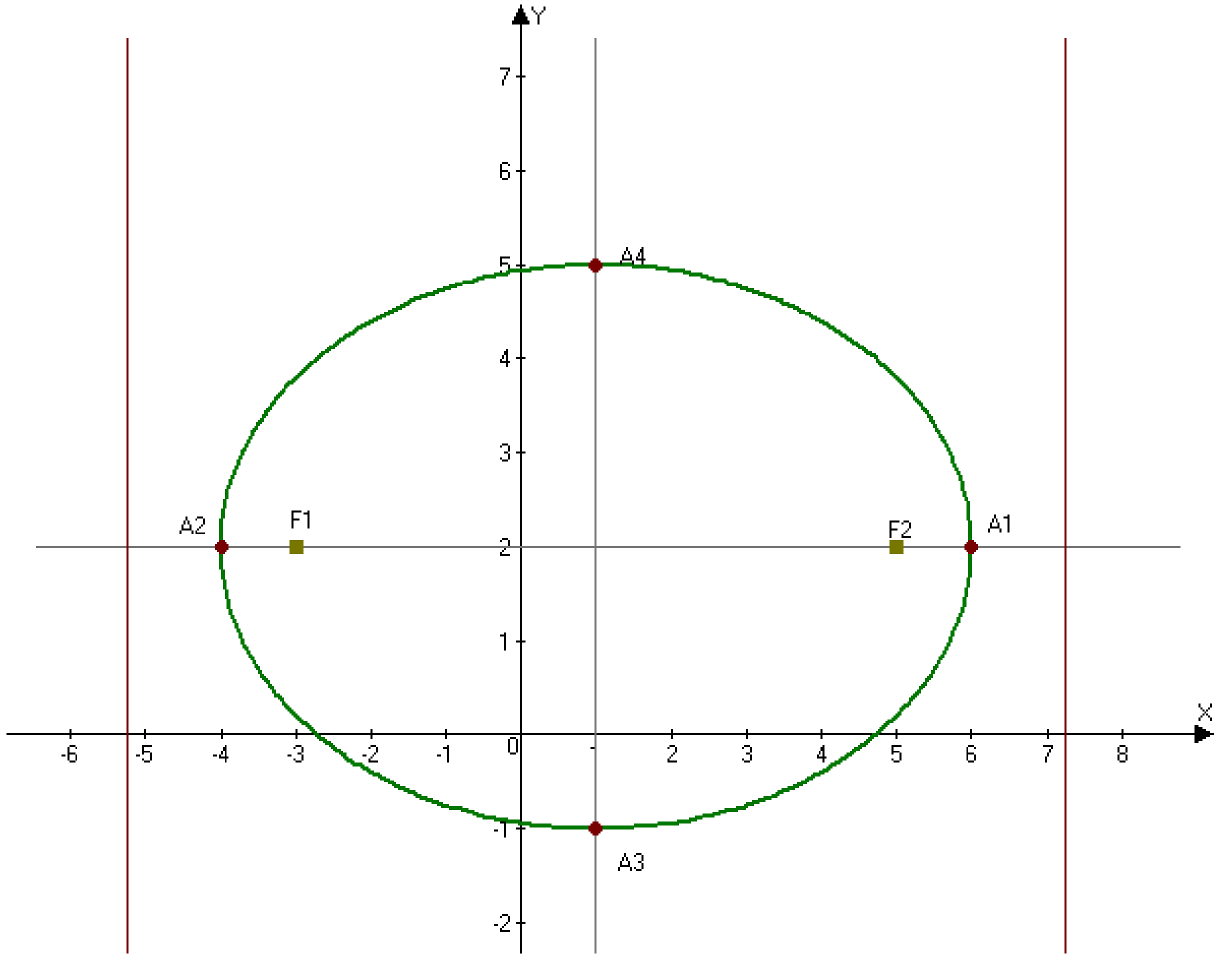
Параметр $c^2=a^2-b^2=25-9=16, c=4$.

Эксцентриситет равен $\varepsilon=c/a=\frac{4}{5}=0,8<1.$

Фокусы в точках:

$$F_1(1-4;2)=F_1(-3;2)$$
$$F_2(1+4;2)=F_2(5;2)$$

Сделаем чертеж:


Y
X
A1
A2
A3
A4
F1
F2
0