

Аналитическая геометрия. Кривые 2-го порядка Пример решения задачи

Задача. Дана кривая. Привести к каноническому виду. Построить и определить вид кривой.

$$6x^2 + 2\sqrt{5}xy + 2y^2 = 21$$

Решение. Составим матрицу для квадратичной формы $6x^2 + 2\sqrt{5}xy + 2y^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения матрицы:

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 6 - \lambda & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (6 - \lambda)(2 - \lambda) - 5 = 12 - 6\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 5 = \\ &= \lambda^2 - 8\lambda + 7 = (\lambda - 1)(\lambda - 7) = 0, \end{aligned}$$

Получаем два собственных значения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 7$.

Найдем соответствующие собственные векторы.

$\lambda_1 = 1$. Получаем систему

$$\begin{cases} 5x + \sqrt{5}y = 0, \\ \sqrt{5}x + y = 0, \end{cases} \Rightarrow y = -\sqrt{5}x.$$

Собственный вектор $r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix}$, нормируем его $r_1^0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = 7$. Получаем систему

$$\begin{cases} -x + \sqrt{5}y = 0, \\ \sqrt{5}x + 5y = 0, \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{5}y.$$

Собственный вектор $r_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$, нормируем его $r_2^0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Матрица S перехода к новому базису имеет столбцами нормированные собственные вектора:

Задача скачана с сайта www.MatBuro.ru

Еще примеры: https://www.matburo.ru/ex_subject.php?p=geom

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике

$$S = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5} \\ -\sqrt{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

Сделаем замену координат:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Или

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{6}}(x_1 + \sqrt{5}y_1), \\ y = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\sqrt{5}x_1 + y_1). \end{cases}$$

В базисе собственных векторов квадратичная форма примет вид:

$$6x^2 + 2\sqrt{5}xy + 2y^2 = 21$$

→

$$x_1^2 + 7y_1^2 = 21$$

$$\frac{x_1^2}{21} + \frac{y_1^2}{3} = 1.$$

Это каноническое уравнение эллипса.

Сделаем чертеж линии $6x^2 + 2\sqrt{5}xy + 2y^2 = 21$:

Задача скачана с сайта www.MatBuro.ru

Еще примеры: https://www.matburo.ru/ex_subject.php?p=geom

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике

