Решение задачи по функциям нескольких переменных скачано с
https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=mafnp
(больше примеров по ссылке)
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

Контрольная работа по разделу «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных»

ЗАДАНИЕ.

Дана функция $f(x,y)$

1. *Исследовать функцию* $f(x,y)$ *на экстремум. Найти экстремальные значения функции.*
2. *Найти наибольшее и наименьшее значения функции* $f(x,y)$ *в заданной области* D.
3. *Составить уравнение касательной плоскости к поверхности* $z=f(x,y)$ *в точке, где* $x=x_0$, $y=y_0$.
4. *Найти величину наибольшей скорости возрастания функции* $f(x,y)$ *в точке* $M_1(x_1,y_1)$.
5. *Вычислить производную функции* $f(x,y)$ *в точке* $M_1(x_1,y_1)$ *в направлении вектора* $\bar{l}=\overline{M_1M_2}$. *Каков характер изменения функции? Почему?*
6. *Найти угол между градиентами функции* $f(x,y)$ *в точках* $M_1(x_1,y_1)$ *и* $M_2(x_2,y_2)$. *Построить векторы и указать угол.*

$f(x,y)=x^2+y^2-3xy$.

Четырехугольник с вершинами $O(0,0)$, $C(0,-2)$, $A(2,0)$, $B(2,2)$.

$x_0=1,\ y_0=3$,

$M_1(-1,1)$, $M_2(2,2)$

РЕШЕНИЕ.

Решение задачи по функциям нескольких переменных скачано с
https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=mafnp
(больше примеров по ссылке)
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

1) Исследуем функцию $f(x,y)=x^2+y^2-3xy$ на экстремум. Найдем экстремальные значения функции.

Найдем стационарные точки функции. Вычислим частные производные и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} f'_x=\left(x^2+y^2-3xy\right)'_x=2x-3y=0, \\ f'_y=\left(x^2+y^2-3xy\right)'_y=2y-3x=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x=3y, \\ 2y=3x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x=9y, \\ 4y=6x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$$

Получили стационарную точку $M(0;0)$. Исследуем ее на экстремум.

Найдем определитель вторых производных:

$$\Delta=\begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=4-9=-5<0.$$

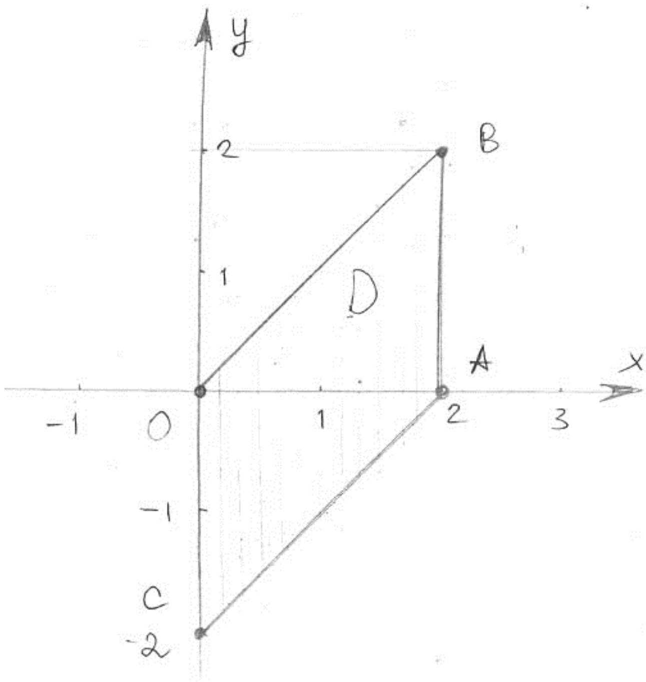
В точке $M(0;0)$ нет экстремума.

2) Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)=x^2+y^2-3xy$ в заданной области D.

D - четырехугольник с вершинами $O(0,0)$, $C(0,-2)$, $A(2,0)$, $B(2,2)$.

Сделаем чертеж области.

Решение задачи по функциям нескольких переменных скачано с
https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=mafnp
(больше примеров по ссылке)
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию



Шаг 1. Найдем стационарные точки внутри области. Точка (0,0) (найдена в предыдущем пункте), $z(0,0)=0$.

Шаг 2. Исследуем значения функции $f(x,y)=x^2+y^2-3xy$ на границах области D

(I) $x=0,\ y\in[-2;0]$.

Тогда $z=y^2$, $z'=2y=0,\ y=0$.

$z(0)=0$.

(II) $y=x,\ x\in[0;2]$.

Тогда $z=x^2+x^2-3x^2=-x^2$, $z'=-2x=0,\ x=0$,

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

$z(0)=0$.

(III) $x=2,\ y\in[0;2]$.

Тогда $z=4+y^2-6y=y^2-6y+4$, $z'=2y-6=0,\ \ y=3\notin[0;2]$

(IV) $y=x-2,\ x\in[0;2]$.

Тогда $z=x^2+(x-2)^2-3(x-2)x=x^2+x^2-4x+4-3x^2+6x=-x^2+2x+4$,

$z'=-2x+2=0,\ \ x=1\in[0;2]$,

$z(1)=-1+2+4=5$

Найдем значения функции в угловых точках:

$z(0;0)=0$, $z(-2;0)=4$, $z(2;0)=4$, $z(2;2)=4+4-12=-4$.

Шаг 3. Выбираем из всех полученных значений наибольшее и наименьшее:

$m=z(2;2)=-4$ и $M=z(1;-1)=5$.

3) Составим уравнение касательной плоскости к поверхности

$z=f(x,y)=x^2+y^2-3xy$ в точке, где $x_0=1,\ y_0=3$.

Обозначим поверхность $F(x,y,z)=x^2+y^2-3xy-z=0$. В точке $x_0=1,\ y_0=3$

получаем $z_0=z(1;3)=1+9-9=1$.

Найдем частные производные:

$F_x'=\left(x^2+y^2-3xy-z\right)_x'=2x-3y$,

$F_y'=\left(x^2+y^2-3xy-z\right)_y'=2y-3x$,

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

$F_z' = \left(x^2+y^2-3xy-z\right)_z' = -1$.

В точке $M_0(1;3;1)$ получаем:

$F_x'(1;3;1) = 2-9=-7$,

$F_y'(1;3;1) = 6-3=3$,

$F_z'(1;3;1) = -1$.

Тогда уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$-7(x-1)+3(y-3)-1(z-1)=0,$$
$$-7x+7+3y-9-z+1=0,$$
$$7x-3y+z+1=0.$$

4) Найдем величину наибольшей скорости возрастания функции $f(x,y)=x^2+y^2-3xy$ в точке $M_1(-1,1)$.

Вычислим частные производные:

$$f_x' = \left(x^2+y^2-3xy\right)_x' = 2x-3y,$$
$$f_y' = \left(x^2+y^2-3xy\right)_y' = 2y-3x.$$

В точке $M_1(-1,1)$ получаем:

$$f_x'(-1;1) = -2-3=-5,$$
$$f_y'(-1;1) = 2-3(-1)=5.$$

Тогда градиент в точке $M_1(-1,1)$ равен $\operatorname{grad} f(M_1)=(-5;5)$. Величина наибольшей скорости возрастания функции равна модулю градиента:

$$v_{\max} = \left|\operatorname{grad} f(M_1)\right| = \sqrt{(-5)^2+5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

5) Вычислим производную функции $f(x,y)=x^2+y^2-3xy$ в точке $M_1(-1,1)$ в направлении вектора $\bar{l}=\overline{M_1M_2}$.

Найдем вектор $\bar{l}=\overline{M_1M_2}=(2-(-1);2-1)=(3;1)$.

Тогда производная функции $f(x,y)=x^2+y^2-3xy$ в точке $M_1(-1,1)$ в направлении $\bar{l}=\overline{M_1M_2}$ равна:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{l}}=\frac{\operatorname{grad} f(M_1)\cdot\bar{l}}{|\bar{l}|}=\frac{(-5;5)\cdot(3,1)}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{-15+5}{\sqrt{10}}=-\sqrt{10}.$$

Производная показывает, насколько быстро меняется функция при движении по данному направлению. В данном случае функция убывает (так как производная отрицательна) со скоростью $\sqrt{10}$.

6) Найдем угол между градиентами функции $f(x,y)=x^2+y^2-3xy$ в точках $M_1(-1,1)$ и $M_2(2,2)$. Построить векторы и указать угол.

Градиент в точке $M_1(-1,1)$ равен $\operatorname{grad} f(M_1)=(-5;5)$.

Найдем градиент в точке $M_2(2,2)$.

Вычислим частные производные:

$$f'_x=\left(x^2+y^2-3xy\right)'_x=2x-3y,$$
$$f'_y=\left(x^2+y^2-3xy\right)'_y=2y-3x.$$

В точке $M_2(2,2)$ получаем:

$$f'_x(2,2)=4-6=-2,$$
$$f'_y(2,2)=4-6=-2.$$

Градиент в точке $M_2(2,2)$ равен $\operatorname{grad} f(M_2)=(-2;-2)$.

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

Найдем угол между векторами:

$$\alpha = \arccos \frac{(-5;5)\cdot(-2;-2)}{\sqrt{(-5)^2+5^2}\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}} = \arccos \frac{10-10}{\sqrt{50}\sqrt{8}} = \arccos 0 = \pi/2.$$

Угол равен 90 градусам.

Сделаем чертеж: