

Функции нескольких переменных Экстремумы

ЗАДАНИЕ.

Найти точки экстремума функции $z = f(x, y)$

$$z = x^2 + xy + y^2 + 2x - y$$

РЕШЕНИЕ.

Найдем стационарные точки функции. Вычислим частные производные и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} z'_x = 2x + y + 2 = 0, \\ z'_y = x + 2y - 1 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = -2, \\ x + 2y = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = -2, \\ 2x + 4y = 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = -2, \\ 3y = 4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5/3, \\ y = 4/3. \end{cases}$$

Получили стационарную точку $M_1(-5/3; 4/3)$. Исследуем ее на экстремум.

Найдем определитель вторых производных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0.$$

В точке $M_1(-5/3; 4/3)$ экстремум есть, причем это минимум, так как $z''_{xx} = 2 > 0$.

Таким образом, $z_{\min} = z(-5/3; 4/3) = -7/3$.