Функции нескольких переменных
Градиент, производная по направлению

ЗАДАНИЕ.

Найти производную функции $u(x,y,z)$ в точке M по направлению нормали к поверхности S, образующей острый угол с положительным направлением оси Oz.

$u=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}$, $S: 2x^2-y^2+z^2-1=0$, $M=(0,-3,4)$.

РЕШЕНИЕ.

Сначала найдем направление нормали к поверхности S, образующее острый угол с положительным направлением оси Oz.

Обозначим $F=2x^2-y^2+z^2-1=0$.

Вычисляем:

$$F'_x=\left(2x^2-y^2+z^2-1\right)'_x=4x,$$

$$F'_y=\left(2x^2-y^2+z^2-1\right)'_y=-2y,$$

$$F'_z=\left(2x^2-y^2+z^2-1\right)'_z=2z.$$

Тогда нормаль: $n_s=\left\{\pm\frac{4x}{\sqrt{16x^2+4y^2+4z^2}};\pm\frac{-2y}{\sqrt{16x^2+4y^2+4z^2}};\pm\frac{2z}{\sqrt{16x^2+4y^2+4z^2}}\right\}$.

Подставляем координаты точки $M=(0,-3,4)$:

$$n_s(M)=\left\{0;\pm\frac{6}{10};\pm\frac{8}{10}\right\}=\left\{0;\pm\frac{3}{5};\pm\frac{4}{5}\right\}.$$

Выбираем знак так, чтобы нормаль образовала острый угол с положительным направлением оси Oz, то есть координата по z должна быть положительна, поэтому

$$n_s(M)=\left\{0;\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right\}.$$

Теперь вычисляем градиент функции $u=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}$ в точке $M=(0,-3,4)$.

$u_x^{'}=\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}\cdot 2x=3x\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $u_x^{'}(M)=0$

$u_y^{'}=\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}\cdot 2y=3y\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $u_y^{'}(M)=-45$

$u_z^{'}=\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}\cdot 2z=3z\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $u_z^{'}(M)=60$.

То есть $\operatorname{grad} u(M)=\{0;-45;60\}$.

Тогда производная функции $u=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}$ по направлению $n_s(M)=\left\{0;\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right\}$ равна:

$$\frac{\partial u}{\partial n_s}(M)=\operatorname{grad} u(M)\cdot n_s(M)=\left\{0;\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right\}\cdot\{0;-45;60\}=-45\frac{3}{5}+60\frac{4}{5}=-27+48=21.$$