Функции нескольких переменных
Частные производные

Задание.

Проверить, удовлетворяет ли функция двух переменных $z = f(x,y)$ *указанному дифференциальному уравнению.*

$$z = x\sin\frac{y}{x} + y\ln\frac{y}{x},\quad y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 0.$$

Решение.

Вычисляем необходимые производные.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x\sin\frac{y}{x} + y\ln\frac{y}{x}\right)'_x = \sin\frac{y}{x} + x\cos\frac{y}{x}\left(\frac{y}{x}\right)'_x + y\frac{x}{y}\left(\frac{y}{x}\right)'_x = \sin\frac{y}{x} - \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x} - \frac{y}{x}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x\sin\frac{y}{x} + y\ln\frac{y}{x}\right)'_y = x\cos\frac{y}{x}\left(\frac{y}{x}\right)'_y + \ln\frac{y}{x} + y\frac{x}{y}\left(\frac{y}{x}\right)'_y = \cos\frac{y}{x} + \ln\frac{y}{x} + 1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\cos\frac{y}{x} + \ln\frac{y}{x} + 1\right)'_y = -\sin\frac{y}{x}\left(\frac{y}{x}\right)'_y + \frac{x}{y}\left(\frac{y}{x}\right)'_y = -\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x} + \frac{1}{y}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \left(\sin\frac{y}{x} - \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x} - \frac{y}{x}\right)'_y = \cos\frac{y}{x}\left(\frac{y}{x}\right)'_y - \frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\sin\frac{y}{x}\left(\frac{y}{x}\right)'_y - \frac{1}{x} =$$
$$= \frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} + \frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x} - \frac{1}{x} = \frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x} - \frac{1}{x}.$$

Подставляем все:

$$y\left(-\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x} + \frac{1}{y}\right) + x\left(\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\right) = 0,$$
$$-\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x} + 1 + \frac{y}{x}\sin\frac{y}{x} - 1 = 0,$$
$$0 = 0.$$

Верно.