

Теория поля Дивергенция и ротор векторного поля

ЗАДАНИЕ.

Найти дивергенцию и ротор векторного поля

$$\bar{a} = (3x - y)\bar{i} + (6z + 5x)\bar{k}.$$

РЕШЕНИЕ.

Если задано векторное поле

$\bar{a} = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$, то его дивергенция равна:

$$\operatorname{div} \bar{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

В нашем случае:

$$P(x, y, z) = (3x - y); \quad Q(x, y, z) = 0; \quad R(x, y, z) = (6z + 5x).$$

Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 3; \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 6.$$

Окончательно получим:

$$\operatorname{div} \bar{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3 + 0 + 6 = 9.$$

Ротором векторного поля $\bar{a} = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$ называется вектор

$$\operatorname{rot} \bar{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \bar{k}$$

Найдём необходимые частные производные

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -1;$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial R}{\partial x} = 5.$$

Тогда

$$\operatorname{rot} \bar{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \bar{k} = 0\bar{i} - 5\bar{j} + \bar{k}$$

ОТВЕТ: $\operatorname{div} \bar{a} = 9$. $\operatorname{rot} \bar{a} = 0\bar{i} - 5\bar{j} + \bar{k}$