

Решение задач выполнено на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=mafa

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

Функциональный анализ

Задание.

Вычислить $\|x\|$ в нормированном пространстве X , если:

А) $x(t) = \sqrt{t}$, $x \in C[0,1]$

Б) $x(t) = \sqrt{t}$, $x \in L_p[0,1]$

Решение: а) В пространстве $C[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций норма определяется формулой [1, с.50]:

$$\|x\|_{C[a,b]} = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|.$$

Найдем норму функции $x(t) = \sqrt{t}$ в пространстве $C[0,1]$:

$$\|x\|_{C[0,1]} = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|$$

Поскольку на отрезке $[0;1]$ $\sqrt{t} \geq 0$, то

$$\|x\|_{C[0,1]} = \max_{t \in [0,1]} |x(t)| = \max_{t \in [0,1]} x(t)$$

Задача сводится к нахождению наибольшего значения функции $x(t)$ на отрезке $[0, 1]$. Для этого нам нужно найти значение функции в стационарных точках $[\]$ и на концах отрезка, а затем выбрать из них максимальное значение.

Находим производную функции:

Решение задач выполнено на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=mafa

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

$$x'(t) = (\sqrt{t})' = \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

Поскольку значение производной функции $x(t)$ не равно нулю ни при каких значениях t , то стационарных точек нет. При $t=0$ значение $x'(t)$ не определено. Определим значение функции $x(t)$ на границах промежутка (в точках $t=0, t=1$):

$$x(0) = \sqrt{0} = 0; \quad x(1) = \sqrt{1} = 1.$$

Из полученных двух значений выбираем наибольшее. Таким образом,

$$\|x\|_{C[0,1]} = \max_{t \in [0,1]} x(t) = \max_{t \in [0,1]} \sqrt{t} = \max\{0,1\} = 1.$$

б) В пространстве $L_p[0,1]$ норма определяется формулой [1, с.50]:

$$\|x\|_{L_p[0,1]} = \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Найдем норму функции $x(t) = \sqrt{t}$ в пространстве $L_p[0,1]$:

$$\|x\|_{L_p[0,1]} = \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{1/p} = \left(\int_0^1 |\sqrt{t}|^p dt \right)^{1/p}.$$

Поскольку на отрезке $[0;1]$ $\sqrt{t} \geq 0$, то

Решение задач выполнено на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=mafa

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

$$\begin{aligned}\|x\|_{L_p[0,1]} &= \left(\int_0^1 |\sqrt{t}|^p dt \right)^{1/p} = \left(\int_0^1 (\sqrt{t})^p dt \right)^{1/p} = \left(\int_0^1 (t)^{\frac{p}{2}} dt \right)^{1/p} = \\ &= \left(\frac{t^{\frac{p}{2}+1}}{\frac{p}{2}+1} \Big|_0^1 \right)^{1/p} = \left(\frac{1}{\frac{p}{2}+1} - \frac{0}{\frac{p}{2}+1} \right)^{1/p} = \left(\frac{2}{p+2} \right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Ответ: а) 1, б) $\left(\frac{2}{p+2} \right)^{1/p}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ганенкова, Е. Г. Функциональный анализ: основные классы пространств : учебное пособие для студентов математического факультета / Е. Г. Ганенкова, К. Ф. Амозова. – Петрозаводск : Изд-во ПетрГУ, 2013. – 52 с.