Функциональный анализ

Задание. *Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+\sin x}$ *на промежутке* $E=(-\infty;\infty)$.

Решение:

$$|u_n(x)|=\frac{1}{2n+\sin x}.$$

Известно, что функция $\sin x$ является ограниченной, $|\sin x|\le 1 \quad \forall x\in E$. Тогда

$$|u_1(x)|>|u_2(x)|>\ldots>|u_n(x)|>\ldots,\ \lim_{n\to\infty}|u_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+\sin x}=0.$$

Таким образом, для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+\sin x}$ выполнены два условия признака Лейбница сходимости знакочередующегося ряда [2, с.67]. Значит, этот ряд сходится на промежутке $E=(-\infty;\infty)$.

По признаку Вейерштрасса [2, с.77], если функции $u_1(x),u_2(x),\ldots,u_n(x),\ldots$ по абсолютной величине не превосходят в некоторой области положительных чисел $a_1,a_2(x),\ldots,a_n(x),\ldots$, причем числовой ряд $a_1+a_2(x)+\ldots+a_n(x)+\ldots$ сходится, то функциональный ряд $u_1(x),u_2(x),\ldots,u_n(x),\ldots$ в этой области сходится равномерно.

Поскольку $\sin x$ - ограниченная функция, $\sin x\in[1;-1]$, то

$$|u_n(x)| = \left|\frac{1}{2n+\sin x}\right| = \frac{1}{2n+\sin x} < \frac{1}{2n-1}.$$

Поскольку $n \geq 1$, то $a_n = \frac{1}{2n-1} > 0$. То есть первое условие признака Вейерштрасса выполнено.

Исследуем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ на сходимость. Сравним ряд с гармоническим рядом, у которого $v_n = \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n-1}:\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{2n}{n}-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}.$$

Поскольку гармонический ряд расходится и $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{v_n}$ - конечное, отличное от нуля число, то, по второму признаку сравнения [2, с.67], числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ расходится.

Таким образом, второе условие признака Вейерштрасса не выполнено, значит, функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+\sin x}$ на промежутке $E=(-\infty;\infty)$ сходится неравномерно.

Ответ: функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+\sin x}$ на промежутке $E=(-\infty;\infty)$ сходится неравномерно.