

## Ряды Фурье

Функцию  $f(x) = 1 - x/4$  разложить в ряд Фурье четным образом на промежутке  $[-4;4]$ .

Алгоритм.

1. Определить ортогональную на заданном промежутке систему тригонометрических функций, указать общий период этих тригонометрических функций и вычислить квадраты норм этих функций.
2. Записать общий вид соответствующего тригонометрического ряда Фурье и формулы для вычисления коэффициентов Фурье (в общем виде).
3. Изобразить график суммы ряда Фурье на промежутке  $[-16;16]$ .
4. Вычислить первые 2 не нулевые коэффициента ряда Фурье, записать соответствующие тригонометрические многочлены и вычислить для них среднее квадратическое отклонение (СКО).
5. Используя теорему Дирихле:
  - а) найти сумму ряда Фурье в точке  $x=140/3$
  - б) найти сумму одного из числовых рядов записав сумму ряда Фурье в точке  $x_0=0$  или  $x_0=4$

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

## Решение

Часть 1. Определим ортогональную на заданном промежутке систему тригонометрических функций, укажем общий период этих тригонометрических функций и вычислим квадраты норм этих функций.

Для промежутка  $[-4;4]$  длины  $T = 8$  ортогональная система тригонометрических функций задается следующим образом:

$$F = \left\{ 1; \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right); \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right); n = 1, 2, \dots \right\} = \left\{ 1; \cos\left(\frac{\pi nx}{4}\right); \sin\left(\frac{\pi nx}{4}\right); n = 1, 2, \dots \right\}.$$

Общий период  $T = 8$ .

Вычислим квадраты норм этих функций.

$$\|1\|_{[-4;4]}^2 = \int_{-4}^4 1^2 dx = x \Big|_{-4}^4 = 4 + 4 = 8 = T,$$

$$\left\| \cos\left(\frac{\pi nx}{4}\right) \right\|_{[-4;4]}^2 = \int_{-4}^4 \cos^2\left(\frac{\pi nx}{4}\right) dx = \int_0^4 \left(1 + \cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)\right) dx = \left(x + \frac{2}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right)\right) \Big|_0^4 =$$

$$= \left(4 + \frac{2}{\pi n} \sin\left(\frac{4\pi n}{2}\right)\right) = 4 = T/2.$$

$$\left\| \sin\left(\frac{\pi nx}{4}\right) \right\|_{[-4;4]}^2 = \int_{-4}^4 \sin^2\left(\frac{\pi nx}{4}\right) dx = \int_0^4 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)\right) dx = \left(x - \frac{2}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right)\right) \Big|_0^4 =$$

$$= \left(4 - \frac{2}{\pi n} \sin\left(\frac{4\pi n}{2}\right)\right) = 4 = T/2.$$

Часть 2. Запишем общий вид соответствующего тригонометрического ряда Фурье и формулы для вычисления коэффициентов Фурье (в общем виде).

Общий вид ряда Фурье:

$$S(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos\left(\frac{\pi nx}{4}\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi nx}{4}\right) \right).$$

Формулы для вычисления коэффициентов ряда Фурье:

$$A_0 = \frac{(f(x), 1)}{\|1\|_{[-4;4]}^2} = \frac{1}{8} \int_{-4}^4 f(x) dx,$$

$$A_n = \frac{\left(f(x), \cos\left(\frac{\pi nx}{4}\right)\right)}{\left\| \cos\left(\frac{\pi nx}{4}\right) \right\|_{[-4;4]}^2} = \frac{1}{4} \int_{-4}^4 f(x) \cos\left(\frac{\pi nx}{4}\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$B_n = \frac{\left(f(x), \sin\left(\frac{\pi nx}{4}\right)\right)}{\left\| \sin\left(\frac{\pi nx}{4}\right) \right\|_{[-4;4]}^2} = \frac{1}{4} \int_{-4}^4 f(x) \sin\left(\frac{\pi nx}{4}\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Если учесть, что функцию  $f(x)$  следует разложить четным образом, то формулы с учетом четности преобразуются к следующему виду:

Формулы для вычисления коэффициентов ряда Фурье:

$$A_0 = \frac{(f(x), 1)}{\|1\|_{[-4;4]}^2} = \frac{1}{8} \int_{-4}^4 f(x) dx = \frac{1}{4} \int_0^4 f(x) dx,$$

$$A_n = \frac{\left( f(x), \cos\left(\frac{\pi nx}{4}\right) \right)}{\left\| \cos\left(\frac{\pi nx}{4}\right) \right\|_{[-4;4]}^2} = \frac{1}{4} \int_{-4}^4 f(x) \cos\left(\frac{\pi nx}{4}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) \cos\left(\frac{\pi nx}{4}\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$B_n = \frac{\left( f(x), \sin\left(\frac{\pi nx}{4}\right) \right)}{\left\| \sin\left(\frac{\pi nx}{4}\right) \right\|_{[-4;4]}^2} = \frac{1}{4} \int_{-4}^4 f(x) \sin\left(\frac{\pi nx}{4}\right) dx = 0 \quad (\text{интеграл от нечетной функции по симметричному интервалу}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Общий вид ряда Фурье:  $S(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{\pi nx}{4}\right)$ .

Вычислим теперь для заданной функции  $f(x) = 1 - x/4$  коэффициенты.

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_0^4 f(x) dx = \frac{1}{4} \int_0^4 \left(1 - \frac{x}{4}\right) dx = \frac{1}{4} \left( x - \frac{x^2}{8} \right) \Big|_0^4 = \frac{1}{4} \left( 4 - \frac{16}{8} \right) = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) \cos\left(\frac{\pi nx}{4}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 \left(1 - \frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi nx}{4}\right) dx = \left| \begin{array}{l} u = 1 - x/4 \quad du = -1/4 dx \\ dv = \cos\left(\frac{\pi nx}{4}\right) dx \quad v = \frac{4}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi nx}{4}\right) \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{4}\right) \frac{4}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi nx}{4}\right) \Big|_0^4 + \frac{1}{2\pi n} \int_0^4 \sin\left(\frac{\pi nx}{4}\right) dx = -\frac{2}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{\pi nx}{4}\right) \Big|_0^4 = -\frac{2}{\pi^2 n^2} (\cos \pi n - \cos 0) = \\ &= \frac{2}{\pi^2 n^2} (1 - (-1)^n). \end{aligned}$$

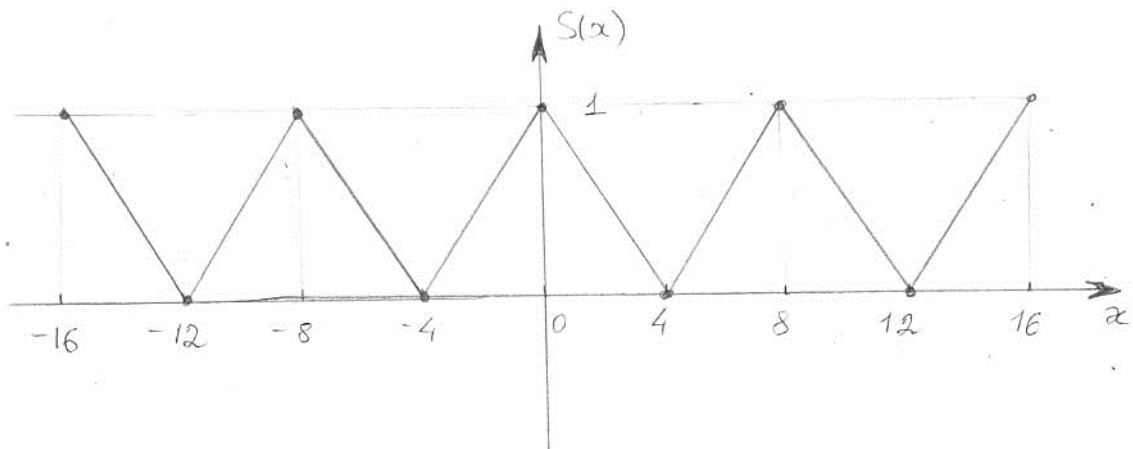
Ряд имеет вид:  $S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 n^2} (1 - (-1)^n) \cos\left(\frac{\pi nx}{4}\right)$ .

Часть 3. Изобразим график суммы ряда Фурье на промежутке  $[-16; 16]$ .

Учитываем, что функция отображается четным образом на интервал  $[-4; 0]$  (симметрично относительно оси  $Oy$  к функции на интервале  $[0; 4]$ ).

В точках непрерывности  $S(x) = f(x)$ .

На концах промежутков  $S(x) = \frac{1}{2} (f(-4+0) + f(4-0)) = f(4) = 0$ .



Часть 4. Вычислим первые 2 не нулевые коэффициента ряда Фурье, запишем соответствующие тригонометрические многочлены и вычислим для них среднее квадратическое отклонение (СКО).

$$\text{Ряд имеет вид: } S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 n^2} (1 - (-1)^n) \cos\left(\frac{\pi n x}{4}\right).$$

Первые ненулевые коэффициенты:

$$A_0 = \frac{1}{2}, \quad A_1 = \frac{2}{\pi^2 1^2} (1 - (-1)^1) = \frac{4}{\pi^2}.$$

Соответствующие тригонометрические многочлены:

$$S_0(x) = \frac{1}{2}, \quad S_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right).$$

Вычислим для них среднее квадратическое отклонение (СКО) по формуле

$$\Delta_n = \sqrt{\|f(x) - S_n(x)\|_{[-4;4]}^2} = \sqrt{\int_{-4}^4 (f(x) - S_n(x))^2 dx}.$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \int_{-4}^4 (f(x) - S_0(x))^2 dx &= 2 \int_0^4 \left(1 - \frac{x}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 dx = 2 \int_0^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right)^2 dx = \frac{1}{8} \int_0^4 (2-x)^2 dx = \\ &= -\frac{1}{24} (2-x)^3 \Big|_0^4 = -\frac{1}{24} ((2-4)^3 - (2-0)^3) = -\frac{1}{24} (-8-8) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{СКО: } \Delta_0 = \sqrt{\int_{-4}^4 (f(x) - S_0(x))^2 dx} = \sqrt{2/3}.$$

Тот же результат можно было получить по общей формуле:

$\Delta_0 = \|f\|^2 - T \cdot A_0^2 = \frac{8}{3} - 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{3}$ , здесь норма функции вычислена следующим образом:

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \int_{-4}^4 (f(x))^2 dx = 2 \int_0^4 \left(1 - \frac{x}{4}\right)^2 dx = \frac{1}{8} \int_0^4 (4-x)^2 dx = \\ &= -\frac{1}{24} (4-x)^3 \Big|_0^4 = -\frac{1}{24} ((4-4)^3 - (4-0)^3) = -\frac{-64}{24} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Следующее СКО вычислим по рекуррентной формуле:  $\Delta_n^2 = \Delta_{n-1}^2 - \frac{T}{2} (A_n^2 + B_n^2)$ .

Получаем:

$$\Delta_1^2 = \Delta_0^2 - \frac{8}{2} (A_1^2 + B_1^2) = \frac{2}{3} - 4 \left(\frac{4}{\pi^2}\right)^2 = \frac{2}{3} - \frac{64}{\pi^4}.$$

$$\Delta_1 = \sqrt{\frac{2}{3} - \frac{64}{\pi^4}}.$$

Часть 5. Используя теорему Дирихле:

а) Найдем сумму ряда Фурье в точке  $x = \frac{140}{3} = 46\frac{2}{3} = 48 - 1\frac{1}{3} = 6T - \frac{4}{3}$ . Точка лежит в

интервале непрерывности функции, значит, получаем:

$$S\left(\frac{140}{3}\right) = S\left(6T - \frac{4}{3}\right) = S\left(-\frac{4}{3}\right) = f\left(-\frac{4}{3}\right) = f\left(\frac{4}{3}\right) = 1 - \frac{4/3}{4} = \frac{2}{3}.$$

б) Найдем сумму одного из числовых рядов, записав сумму ряда Фурье в точке  $x_0=0$  или  $x_0=4$

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

Заметим, что при четных значениях  $n = 2k$  коэффициенты ряда обнуляются, поэтому ряд можно записать в следующем виде:

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 n^2} (1 - (-1)^n) \cos\left(\frac{\pi n x}{4}\right) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos\left(\frac{\pi x (2k-1)}{4}\right).$$

Полагая  $x=0$ , получим:

$$S(0) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k-1)^2} = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = f(0) = 1.$$

Отсюда можно выразить:

Типовой расчет по рядам Фурье. Выполнен в [www.MatBuro.ru](http://www.MatBuro.ru)  
©МатБюро – Решение заданий математики, экономики, программирования  
Сделаем ваши задания на отлично. [http://www.matburo.ru/sub\\_subject.php?p=vm](http://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=vm)

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 1,$$

$$\frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$