Тема: Производная и ее приложения

ЗАДАНИЕ. *Дан цилиндр с неизменяющейся площадью поверхности A. Найти отношение высоты h к радиусу r, при котором объем будет максимальный.*

РЕШЕНИЕ: Пусть высота цилиндра равна h, радиус основания равен r, по смыслу задачи $r,h>0$.

По формулам из геометрии известно, что объем цилиндра равен $V=\pi r^2 h$, а площадь полной поверхности цилиндра равна $S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r(r+h)$.

По условию полная поверхность $S=A$, откуда можно выразить:

$$S=2\pi r(r+h)=A,$$

$$r(r+h)=\frac{A}{2\pi},$$

$$r+h=\frac{A}{2\pi r},$$

$$h=\frac{A}{2\pi r}-r.$$

Подставим в формулу для объема:

$$V=\pi r^2 h=\pi r^2\left(\frac{A}{2\pi r}-r\right)=\pi\left(\frac{A}{2\pi}r-r^3\right).$$

Найдем максимум этой функции одной переменной. Для этого вычислим производную и приравняем к нулю:

$$V'=\pi\left(\frac{A}{2\pi}-3r^2\right)=3\pi\left(\frac{A}{6\pi}-r^2\right)=3\pi\left(\sqrt{\frac{A}{6\pi}}-r\right)\left(\sqrt{\frac{A}{6\pi}}+r\right)=0.$$

Критические точки: $r_1=\sqrt{\frac{A}{6\pi}}$, $r_2=-\sqrt{\frac{A}{6\pi}}$ (не подходит по смыслу задачи).

В этой точке достигается максимум, так как вторая производная

$$V''=3\pi(-2r)=-6\pi r\Big|_{r=\sqrt{\frac{A}{6\pi}}}=-6\pi\sqrt{\frac{A}{6\pi}}<0.$$

Итак, размеры цилиндра: $r=\sqrt{\frac{A}{6\pi}}$, $h=\dfrac{A}{2\pi\sqrt{\frac{A}{6\pi}}}-\sqrt{\frac{A}{6\pi}}$.

Отношение высоты к радиусу равно:

$$\frac{h}{r}=\frac{A}{2\pi\sqrt{\frac{A}{6\pi}}\sqrt{\frac{A}{6\pi}}}-1=\frac{A\cdot 6\pi}{2\pi A}-1=3-1=2.$$

Ответ: 2.