Задача с решением по численным методам
Тема: приближенное решение системы линейных уравнений

Задание.

Решить системы линейных уравнений с точностью до 0.001 методами простой итерации и Гаусса-Зейделя, предварительно проверив на сходимость.

$$\begin{pmatrix} 0.18 & -0.34 & -0.12 & 0.15 \\ 0.11 & 0.23 & -0.15 & 0.32 \\ 0.05 & -0.12 & 0.14 & -0.18 \\ 0.12 & 0.08 & 0.06 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.33 \\ -0.84 \\ 1.16 \\ -0.57 \end{pmatrix}$$

Решение.

Сходимость.

Сходимость для обоих методов имеет место, если модули диагональных элементов матрицы A заданной системы или для каждой строки превышают сумму модулей недиагональных элементов этой строки, или же для каждого столбца превышают сумму модулей недиагональных элементов этого столбца.

Чтобы обеспечить сходимость, необходимо перейти к эквивалентной системе, для которой условие сходимости будет выполняться. Это можно сделать с помощью эквивалентных операций над строками (что в данном случае представляется затруднительным). Применим другой способ, более универсальный, но более сложный вычислительно. Вычислим очень грубо, с точностью до целых, матрицу A^{-1}. Обозначим полученную матрицу T:

$$T = \begin{pmatrix} 4 & -16 & -26 & 28 \\ 0 & -8 & -15 & 14 \\ -8 & 45 & 73 & -58 \\ -5 & 36 & 54 & -47 \end{pmatrix}$$

Теперь умножим систему $Ax = B$ на матрицу T, получим эквивалентную систему:

$$TAx = TB$$

$$TA = \begin{pmatrix} 1.02 & 0.32 & -0.04 & 0.16 \\ 0.05 & 1.08 & -0.06 & 0.14 \\ 0.2 & -0.33 & 0.95 & 0.06 \\ 0.12 & -0.26 & -0.06 & 1.05 \end{pmatrix}; TB = \begin{pmatrix} -27.36 \\ -18.66 \\ 69.3 \\ 52.54 \end{pmatrix}$$

Теперь система имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1.02 & 0.32 & -0.04 & 0.16 \\ 0.05 & 1.08 & -0.06 & 0.14 \\ 0.2 & -0.33 & 0.95 & 0.06 \\ 0.12 & -0.26 & -0.06 & 1.05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27.36 \\ -18.66 \\ 69.3 \\ 52.54 \end{pmatrix}$$

Проверим условие сходимости:

$$1.02 > 0.32 + 0.04 + 0.16$$
$$1.08 > 0.05 + 0.06 + 0.14$$
$$0.95 > 0.2 + 0.33 + 0.06$$
$$1.05 > 0.12 + 0.26 + 0.06$$

Условие сходимости выполнено, (матрица системы обладает свойством диагонального преобладания). Выразим из первого уравнения x_1, из второго - x_2, из третьего - x_3, из четвертого - x_4, получим:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{0.32}{1.02}x_2 + \frac{0.04}{1.02}x_3 - \frac{0.16}{1.02}x_4 - 27.36 \\ x_2 = -\frac{0.05}{1.08}x_1 + \frac{0.06}{1.08}x_3 - \frac{0.14}{1.08}x_4 - 18.66 \\ x_3 = -\frac{0.2}{0.95}x_1 + \frac{0.33}{0.95}x_2 - \frac{0.06}{0.95}x_4 + 69.3 \\ x_4 = -\frac{0.12}{1.05}x_1 + \frac{0.26}{1.05}x_2 + \frac{0.06}{1.05}x_3 + 52.54 \end{cases}$$

В матричном виде:

$$x = Cx + D$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 & -0.31373 & 0.03922 & -0.15686 \\ -0.04630 & 0 & 0.05556 & -0.12963 \\ -0.21053 & 0.34737 & 0 & -0.06316 \\ -0.11429 & 0.24762 & 0.05714 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -26.82353 \\ -17.27778 \\ 72.94737 \\ 50.03810 \end{pmatrix}$$

Норма матрицы C очевидно меньше 1, итерационный процесс сойдется для любого начального приближения.

<u>Метод простых итераций.</u>

В качестве начального приближения выберем

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} -26.82353 \\ -17.27778 \\ 72.94737 \\ 50.03810 \end{pmatrix}$$

Последующие приближения будем вычислять по схеме:

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + D$$

Критерием достижения заданной точности положим:

$$\max_i\left(\left|x_i^{k+1} - x_i^k\right|\right) < \varepsilon = 0.001$$

Вычисления приведем в таблице:

k	x_1	x_2	x_3	x_4					
0	-26,82353	-17,27778	72,94737	50,03810	d_1	d_2	d_3	d_4	$\max d_i$
1	-26,39148	-18,46974	69,43237	52,99376	0,4320	1,1920	3,5150	2,9557	3,5150
2	-26,61901	-19,06816	68,74069	52,44837	0,2275	0,5984	0,6917	0,5454	0,6917
3	-26,37284	-19,02535	68,61517	52,28667	0,2462	0,0428	0,1255	0,1617	0,2462
4	-26,36583	-19,02276	68,58842	52,26196	0,0070	0,0026	0,0267	0,0247	0,0267
5	-26,36382	-19,02137	68,58941	52,26027	0,0020	0,0014	0,0010	0,0017	0,0020
6	-26,36395	-19,02119	68,58957	52,26044	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002

Итак, для вычисления решения с заданной точностью потребовалось 6 итераций, полученное приближенное решение:

$$x \approx \begin{pmatrix} -26.3640 \\ -19.0212 \\ 68.5896 \\ 52.2604 \end{pmatrix}$$

<u>Метод Зейделя.</u>

Метод Зейделя представляет собой некоторую модификацию метода итераций. Основная его идея заключается в том, что при вычислении $(k\ +\ 1)$ −го приближения неизвестной x_i учитываются уже вычисленные ранее $(k\ +\ 1)$-е приближения неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_{i\,-\,1}$.

$$x = Cx + D$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 & -0.31373 & 0.03922 & -0.15686 \\ -0.04630 & 0 & 0.05556 & -0.12963 \\ -0.21053 & 0.34737 & 0 & -0.06316 \\ -0.11429 & 0.24762 & 0.05714 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -26.82353 \\ -17.27778 \\ 72.94737 \\ 50.03810 \end{pmatrix}$$

В качестве начального приближения к решению выберем

$$x^0 = \begin{pmatrix} -26.82353 \\ -17.27778 \\ 72.94737 \\ 50.03810 \end{pmatrix}$$

Критерием достижения заданной точности положим:

$$\max_i\left(\left|x_i^{k+1} - x_i^k\right|\right) < \varepsilon = 0.001$$

Приведем расчеты в таблице:

k	x_1	x_2	x_3	x_4					
0	-26,82353	-17,27778	72,94737	50,03810	d_1	d_2	d_3	d_4	$\max d_i$
1	-26,39148	-18,48974	68,92042	52,41416	0,4320	1,2120	4,0270	2,3761	4,0270
2	-26,54190	-19,01450	68,61973	52,28423	0,1504	0,5248	0,3007	0,1299	0,5248
3	-26,36867	-19,02238	68,58873	52,26071	0,1732	0,0079	0,0310	0,0235	0,1732
4	-26,36373	-19,02129	68,58956	52,26046	0,0049	0,0011	0,0008	0,0002	0,0049
5	-26,36400	-19,02120	68,58966	52,26052	0,0003	0,0001	0,0001	0,0001	0,0003

В итоге получим приближенное решение с точностью 10^{-3}:

$$x \approx \begin{pmatrix} -26.3640 \\ -19.0212 \\ 68.5897 \\ 52.2605 \end{pmatrix}$$

Ответ.

$$x \approx \begin{pmatrix} -26.3640 \\ -19.0212 \\ 68.5897 \\ 52.2605 \end{pmatrix}$$