

**Задача с решением по численным методам**  
**Тема: аппроксимация функции линейной зависимостью**

ЗАДАНИЕ.

Функция задана таблицей.

i	0	1	2	3	4
x <sub>i</sub>	1	2	3	4	5
y <sub>i</sub>	2	0	1	-1	2

С помощью метода наименьших квадратов интерполировать функцию линейной зависимостью  $P(x) = a_0 + a_1x$  и оценить степень приближения.

РЕШЕНИЕ.

Посчитаем необходимые значения для метода наименьших квадратов.

i	x <sub>i</sub>	y <sub>i</sub>	y <sub>i</sub> <sup>2</sup>	x <sub>i</sub> <sup>2</sup>	x <sub>i</sub> y <sub>i</sub>
0	1	2	4	1	2
1	2	0	0	4	0
2	3	1	1	9	3
3	4	-1	1	16	-4
4	5	-2	4	25	-10
Сумма	15	0	10	55	-9

Теперь определим коэффициенты:

$$a_0 = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{0 \cdot 55 - 15 \cdot (-9)}{5 \cdot 55 - 15^2} = \frac{135}{50} = 2,7$$

$$a_1 = \frac{T \sum x_i y_i - \sum y_i \sum x_i}{N \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{5 \cdot (-9) - 0 \cdot 15}{5 \cdot 55 - 15^2} = \frac{-45}{50} = -0,9$$

Таким образом, можно записать, что по методу наименьших квадратов  $P(x) = 2,7 - 0,9x$

Для проверки адекватности модели посчитаем квадраты отклонений точного значения P(x) от значения по методу наименьших квадратов.

i	x <sub>i</sub>	y точное	y=2,7-0,9x	y <sub>i</sub> - $\bar{y}$	(y <sub>i</sub> - $\bar{y}$ ) <sup>2</sup>
0	1	2	1,8	0,2	0,04
1	2	0	0,9	-0,9	0,81

2	3	1	0	1	1
3	4	-1	-0,9	-0,1	0,01
4	5	-2	-1,8	-0,2	0,04
Сумма	15	0	0	0	1,90

Для оценки степени приближения рассчитаем дисперсию результата:

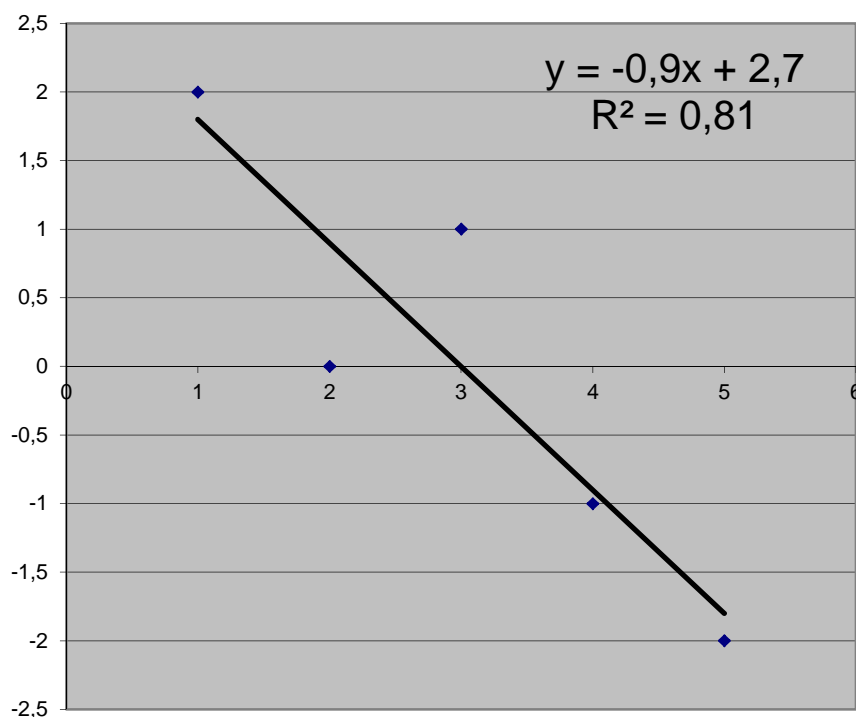
$$S_a^2 = \frac{\sum_{i=0}^4 (y_i - \bar{y}_i)^2}{n-2} = \frac{1,90}{3} = 0,6333$$

$$S_a = \sqrt{0,6333} = 0,7958$$

И величину достоверности аппроксимации

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=0}^4 (y_i - \bar{y}_i)^2}{\sum_{i=0}^4 y_i^2 - \frac{(\sum_{i=0}^4 y_i)^2}{n}} = 1 - \frac{1,90}{10 - \frac{0^2}{5}} = 1 - \frac{1,90}{10} = 1 - 0,190 = 0,810$$

Изобразим точки и нашу прямую на графике:



Величина аппроксимации в 81% это вполне достаточная для некоторых случаев, хотя, конечно, не слишком большая точность.