

Пример решения задачи: тройной интеграл в цилиндрических координатах

ЗАДАНИЕ.

Переходя к цилиндрическим координатам вычислить интеграл

$$\iiint_V x^2 dx dy dz, \quad V: x^2 + y^2 = x, \quad z = x^2 + y^2, \quad z = 0$$

РЕШЕНИЕ. Перейдем к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

Якобиан такой замены $J = r$, то есть $dx dy dz = r dz dr d\varphi$.

Уравнение $x^2 + y^2 = x$ примет вид, $r^2 = r \cos \varphi$, то есть $r = \cos \varphi$.

Уравнение $z = x^2 + y^2$ примет вид $z = r^2$. Учитывая, что $x^2 + y^2 \geq 0$, имеем $x \geq 0$, откуда $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

Итак, область интегрирования:

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq r^2 \\ 0 \leq r \leq \cos \varphi \\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Интеграл примет вид:

$$\begin{aligned} \iiint_V x^2 dx dy dz &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} dr \int_0^{r^2} (r \cos \varphi)^2 \cdot r dz \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} dr \int_0^{r^2} r^3 \cos^2 \varphi dz = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} \left(r^3 \cos^2 \varphi \cdot z \Big|_0^{r^2} \right) dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} (r^5 \cos^2 \varphi) dr \\
 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \varphi \cdot \left(\frac{1}{6} r^6 \Big|_0^{\cos \varphi} \right) d\varphi = \\
 &= \frac{1}{6} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^8 \varphi d\varphi = \frac{1}{6} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right)^4 d\varphi \\
 &= \frac{1}{96} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + 4 \cos 2\varphi + 6 \cos^2 2\varphi + 4 \cos^3 2\varphi + \cos^4 2\varphi) d\varphi = \\
 &= \frac{1}{96} \varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{96} \cdot \frac{4}{2} \sin 2\varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{3}{96} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 4\varphi) d\varphi \\
 &\quad + \frac{2}{96} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 2\varphi) d(\sin 2\varphi) + \\
 &\quad + \frac{1}{96} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 4\varphi}{2} \right)^2 d\varphi \\
 &= \frac{\pi}{96} + \frac{1}{48} (\sin \pi - \sin(-\pi)) + \frac{1}{32} \left(\varphi + \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \\
 &\quad + \left(\sin 2\varphi - \frac{1}{3} \sin^3 2\varphi \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{384} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + 2 \cos 4\varphi + \cos^2 4\varphi) d\varphi = \\
 &= \frac{\pi}{96} + \frac{\pi}{32} + \frac{1}{384} \left(\varphi + \frac{2}{4} \sin 4\varphi \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{768} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 8\varphi) d\varphi =
 \end{aligned}$$

Решение задачи по тройным интегралам скачано с
https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=ma3int

(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi}{96} + \frac{\pi}{32} + \frac{\pi}{384} + \frac{1}{768} \left(\varphi + \frac{1}{8} \sin 4\varphi \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{96} + \frac{\pi}{32} + \frac{\pi}{384} + \frac{\pi}{768} \\ &= \frac{35}{768} \pi \end{aligned}$$

ОТВЕТ. $\frac{35}{768} \pi$