Пример решения задачи: тройной интеграл в цилиндрических координатах

ЗАДАНИЕ.

Переходя к цилиндрическим координатам вычислить интеграл

$$\iiint\limits_V x^2 dxdydz, \qquad V: x^2+y^2=x, \qquad z=x^2+y^2, \qquad z=0$$

РЕШЕНИЕ. Перейдем к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

Якобиан такой замены $J = r$, то есть $dxdydz = r\,dzdrd\varphi$.

Уравнение $x^2+y^2=x$ примет вид, $r^2 = r\cos\varphi$, то есть $r = \cos\varphi$.

Уравнение $z = x^2+y^2$ примет вид $z = r^2$. Учитывая, что $x^2+y^2 \geq 0$, имеем $x \geq 0$, откуда $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

Итак, область интегрирования:

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq r^2 \\ 0 \leq r \leq \cos\varphi \\ -\dfrac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Интеграл примет вид:

$$\iiint\limits_V x^2 dxdydz = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\cos\varphi} dr \int\limits_0^{r^2} (r\cos\varphi)^2 \cdot r dz$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\cos\varphi} dr \int\limits_0^{r^2} r^3\cos^2\varphi\, dz =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{0}^{\cos\varphi} \left(r^3 \cos^2\varphi \cdot z \Big|_{0}^{r^2} \right) dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{0}^{\cos\varphi} (r^5 \cos^2\varphi) dr$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi \cdot \left(\frac{1}{6} r^6 \Big|_{0}^{\cos\varphi} \right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{6} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^8\varphi \, d\varphi = \frac{1}{6} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2} \right)^4 d\varphi$$

$$= \frac{1}{96} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + 4\cos 2\varphi + 6\cos^2 2\varphi + 4\cos^3 2\varphi + \cos^4 2\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{96} \varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{96} \cdot \frac{4}{2} \sin 2\varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{3}{96} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 4\varphi) d\varphi$$

$$+ \frac{2}{96} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 2\varphi) d(\sin 2\varphi) +$$

$$+ \frac{1}{96} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 4\varphi}{2} \right)^2 d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{96} + \frac{1}{48} (\sin\pi - \sin(-\pi)) + \frac{1}{32} \left(\varphi + \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} +$$

$$+ \left(\sin 2\varphi - \frac{1}{3} \sin^3 2\varphi \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{384} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + 2\cos 4\varphi + \cos^2 4\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{96} + \frac{\pi}{32} + \frac{1}{384} \left(\varphi + \frac{2}{4} \sin 4\varphi \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{768} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 8\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{96} + \frac{\pi}{32} + \frac{\pi}{384} + \frac{1}{768}\left(\varphi + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{96} + \frac{\pi}{32} + \frac{\pi}{384} + \frac{\pi}{768}$$

$$= \frac{35}{768}\pi$$

ОТВЕТ. $\frac{35}{768}\pi$