Пример решения задачи: тройной интеграл для вычисления массы тела

ЗАДАНИЕ.

Найти массу тела, заданного системой неравенств, если плотность тела в каждой точке задана функцией $\mu(x,y,z)$.

$\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2}$,

$\mu = \frac{5}{8}z$.

РЕШЕНИЕ.

Перейдем к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Тогда $dxdydz = rdrd\varphi dz$, $r^2 = x^2 + y^2$.

Получаем: $z = \sqrt{4-r^2}$, $z = \frac{1}{2}r$. Найдем кривую пересечения поверхностей:

$\sqrt{4-r^2} = \frac{1}{2}r,$

$4\left(4-r^2\right) = r^2,$

$16-4r^2 = r^2,$

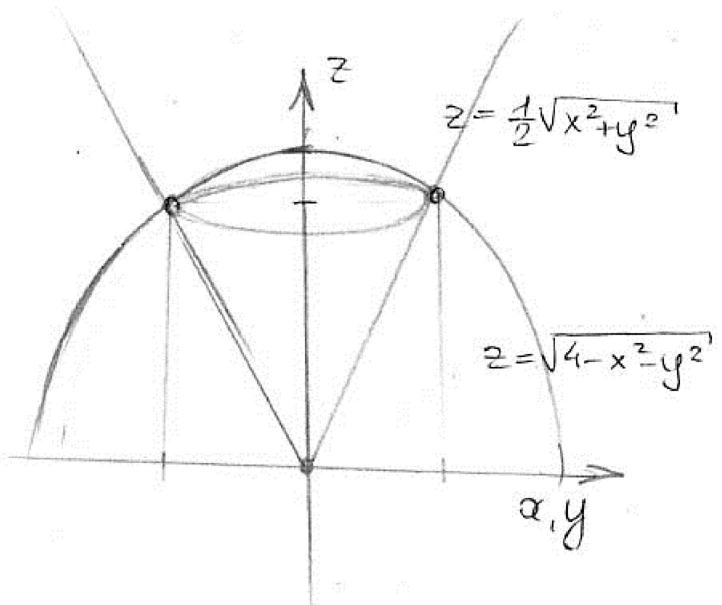
$5r^2 = 16,$

$r^2 = 16/5,$

$r = 4/\sqrt{5}.$

Получаем, что поверхности пересекаются по окружности $r^2 = \frac{16}{5}$.

Сделаем чертеж сечения тела вращения (сверху шар, снизу конус):



Таким образом, получаем ограничения:

$\frac{1}{2}r \le z \le \sqrt{4-r^2}$,

$0 \le r \le \frac{4}{\sqrt{5}}$,

$0 \le \varphi \le 2\pi$.

Тогда масса искомого тела:

$$V = \iiint_V \frac{5}{8} z dx dy dz = \frac{5}{8}\iiint_V zr dr d\varphi dz = \frac{5}{8}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{4/\sqrt{5}} r dr \int_{1/2r}^{\sqrt{4-r^2}} z dz = \frac{5}{16}\left(\varphi\Big|_0^{2\pi}\right)\cdot \int_0^{4/\sqrt{5}} r dr \left(z^2\right)\Big|_{1/2r}^{\sqrt{4-r^2}} =$$

$$= \frac{5}{16} 2\pi \int_0^{4/\sqrt{5}} \left(4 - r^2 - 1/4r^2\right) r dr = \frac{5\pi}{8}\int_0^{4/\sqrt{5}}\left(4r - \frac{5}{4}r^3\right) dr = \frac{5\pi}{8}\left(2r^2 - \frac{5}{16}r^4\right)\Big|_0^{4/\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{5\pi}{8}\left(2\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{5}{16}\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^4\right) = \frac{5\pi}{8}\left(2\frac{16}{5} - \frac{5}{16}\frac{16\cdot 16}{5\cdot 5}\right) = \frac{5\pi}{8}\left(\frac{32}{5} - \frac{16}{5}\right) = \frac{5\pi}{8}\frac{16}{5} = 2\pi.$$