Пример решения задачи: тройной интеграл для вычисления массы тела

Задание.

Используя тройной интеграл в цилиндрической системе координат, вычислить массу кругового цилиндра, нижнее основание которого лежит в плоскости xOy, а ось симметрии совпадает с осью Oz, если заданы радиус основания R, высота цилиндра H и функция плотности $\gamma=\gamma(\rho)$, *где* ρ – *полярный радиус точки.*

Размеры цилиндра, плотность вещества
$R=2,\ H=0{,}5,\ \gamma=2+\rho^2+\rho^3$

Решение.

Заданный цилиндр в полярных координатах описывается неравенствами:

$$\begin{cases} 0\le\rho\le 2 \\ 0\le\varphi\le 2\pi \\ 0\le z\le 0.5 \end{cases}$$

В декартовых координатах масса тела с плотностью $\gamma(x,y,z)$ находится по формуле:

$$m=\iiint\limits_V \gamma(x,y,z)dv$$

При переходе к полярным координатам эта формула принимает вид:

$$m=\iiint\limits_V \rho\cdot\gamma(\rho,\varphi,z)dv$$

$$m=\int_0^{0,5}dz\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2}\rho(2+\rho^2+\rho^3)d\rho=\int_0^{0,5}dz\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2}(2\rho+\rho^3+\rho^4)d\rho=$$

$$=\int_0^{0,5}dz\int_0^{2\pi}\left(\rho^2+\frac{\rho^4}{4}+\frac{\rho^5}{5}\Bigg|_0^2\right)d\varphi=\int_0^{0,5}dz\int_0^{2\pi}\left(4+\frac{16}{4}+\frac{32}{5}\right)d\varphi=$$

$$= \int_0^{0,5} dz \int_0^{2\pi} \frac{72}{5} d\varphi = \int_0^{0,5} \left(\frac{72}{5} \varphi \Big|_0^{2\pi} \right) dz = \int_0^{0,5} \left(\frac{144}{5} \pi \right) dz =$$

$$= \frac{144}{5} \pi z \Big|_0^{0.5} = \frac{144}{5} \pi \cdot 0.5 = \frac{72}{5} \pi$$

ОТВЕТ. $m = \frac{72\pi}{5}$.