

Пример решения задачи: тройной интеграл для вычисления массы тела

ЗАДАНИЕ.

Используя тройной интеграл в цилиндрической системе координат, вычислить массу кругового цилиндра, нижнее основание которого лежит в плоскости xOy , а ось симметрии совпадает с осью Oz , если заданы радиус основания R , высота цилиндра H и функция плотности $\gamma = \gamma(\rho)$, где ρ – полярный радиус точки.

Размеры цилиндра, плотность вещества
$R = 2, H = 0,5, \gamma = 2 + \rho^2 + \rho^3$

РЕШЕНИЕ.

Заданный цилиндр в полярных координатах описывается неравенствами:

$$\begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 0.5 \end{cases}$$

В декартовых координатах масса тела с плотностью $\gamma(x, y, z)$ находится по формуле:

$$m = \iiint_V \gamma(x, y, z) dv$$

При переходе к полярным координатам эта формула принимает вид:

$$\begin{aligned} m &= \iiint_V \rho \cdot \gamma(\rho, \varphi, z) dv \\ m &= \int_0^{0,5} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho(2 + \rho^2 + \rho^3) d\rho = \int_0^{0,5} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (2\rho + \rho^3 + \rho^4) d\rho = \\ &= \int_0^{0,5} dz \int_0^{2\pi} \left(\rho^2 + \frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^2 \right) d\varphi = \int_0^{0,5} dz \int_0^{2\pi} \left(4 + \frac{16}{4} + \frac{32}{5} \right) d\varphi = \end{aligned}$$

Решение задачи по тройным интегралам скачано с
https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=ma3int

(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

$$\begin{aligned} &= \int_0^{0,5} dz \int_0^{2\pi} \frac{72}{5} d\varphi = \int_0^{0,5} \left(\frac{72}{5} \varphi \Big|_0^{2\pi} \right) dz = \int_0^{0,5} \left(\frac{144}{5} \pi \right) dz = \\ &= \frac{144}{5} \pi z \Big|_0^{0,5} = \frac{144}{5} \pi \cdot 0,5 = \frac{72}{5} \pi \end{aligned}$$

ОТВЕТ. $m = \frac{72\pi}{5}$.