

**Пример решения задачи:
Вычисление площади фигуры в полярных координатах**

ЗАДАНИЕ.

Вычислить площадь области, заданной неравенствами

$(x-r)^2 + y^2 \leq r^2$, $y \geq 0$, $-2x+2r \geq y$, перейдя предварительно к полярным координатам

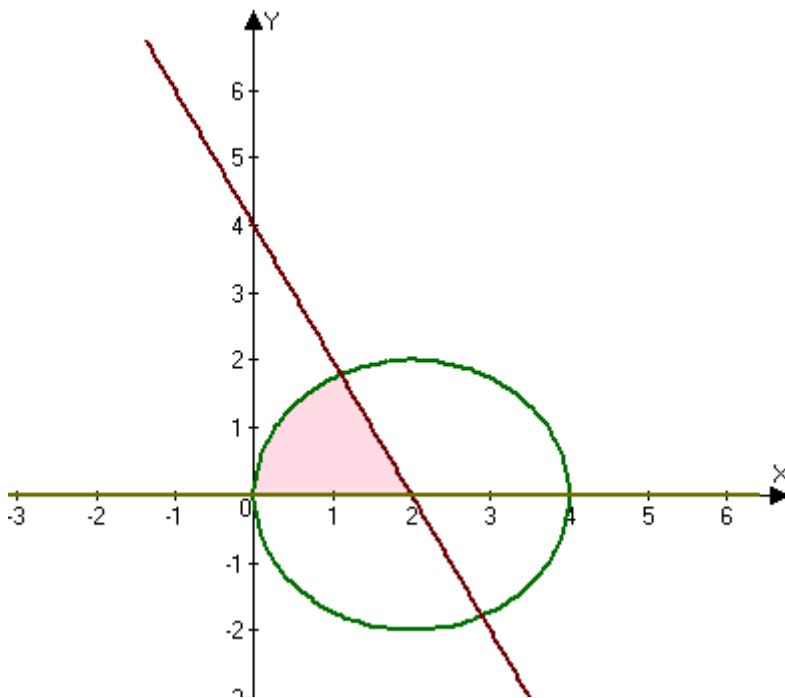
РЕШЕНИЕ.

Сделаем схематический чертеж искомой области (Положив для определенности $r = 2$):

$(x-r)^2 + y^2 \leq r^2$ - область внутри окружности радиуса r с центром $(r;0)$.

$y \geq 0$ - полуплоскость.

$-2x+2r \geq y$ - полуплоскость.



Перейдем к полярным координатам:

Переходим к полярным координатам.

$$\begin{cases} x - r = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Тогда $dxdy = \rho d\rho d\varphi$, $\rho^2 = (x - r)^2 + y^2$.

$$y \leq -2x + 2r,$$

$$\rho \sin \varphi \leq -2\rho \cos \varphi - 2r + 2r,$$

$$\sin \varphi \leq -2 \cos \varphi,$$

$$\operatorname{tg} \varphi \geq -2.$$

Получаем: $0 < \rho < r$, $\pi - \operatorname{arctg} 2 < \varphi < \pi$.

Площадь области:

$$S = \int_{\pi - \operatorname{arctg} 2}^{\pi} d\varphi \int_0^r \rho d\rho = \frac{1}{2} (\pi - \pi + \operatorname{arctg} 2) \rho^2 \Big|_0^r = \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} 2) r^2.$$