Пример решения задачи:
Вычисление площади фигуры в полярных координатах

ЗАДАНИЕ.

Вычислить с помощью двойного интеграла в полярных координатах площадь фигуры, ограниченной заданными линиями.

$y^2-4y+x^2=0,$

$y^2-6y+x^2=0,$

$y=\sqrt{3}x, x=0.$

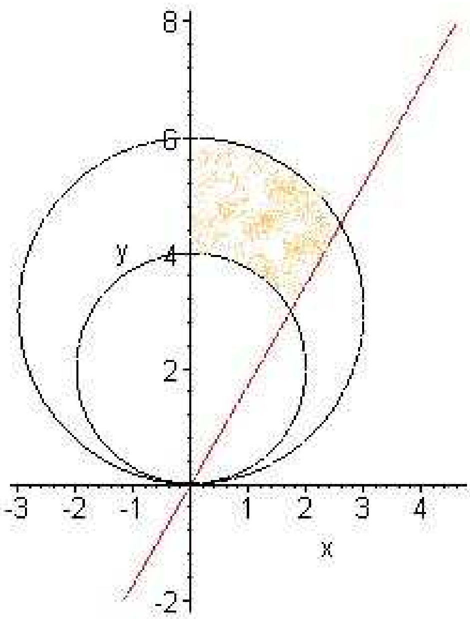
РЕШЕНИЕ.

Сделаем чертеж фигуры.

$y^2-4y+x^2=0,$
$(y-2)^2+x^2=2^2$ - окружность с центром (0,2) радиуса 2.

$y^2-6y+x^2=0,$
$(y-3)^2+x^2=3^2$ - окружность с центром (0,3) радиуса 3.

$y=\sqrt{3}x, x=0.$ - прямые.



Нужная область закрашена на чертеже.

Перейдем к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Тогда $dxdy = rdrd\varphi$, $r^2 = x^2 + y^2$.

Найдем ограничения.

Полярный угол меняется от $\varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$ до $\dfrac{\pi}{2}$.

Полярный радиус:

$x^2 + y^2 - 4y = 0$,

$r^2 - 4r\sin\varphi = 0$,

$r(r - 4\sin\varphi) = 0$,

$0 \le r \le 4\sin\varphi$.

$x^2 + y^2 - 6y = 0$,

$r^2 - 6r\sin\varphi = 0$,

$r(r - 6\sin\varphi) = 0$,

$0 \le r \le 6\sin\varphi$.

Итого $4\sin\varphi \le r \le 6\sin\varphi$..

Получаем, что

$$S = \iint_G f(x,y)dxdy = \iint_G rdrd\varphi = \int_{\pi/3}^{\pi/2} d\varphi \int_{4\sin\varphi}^{6\sin\varphi} rdr = \int_{\pi/3}^{\pi/2} d\varphi \frac{1}{2} r^2 \Big|_{4\sin\varphi}^{6\sin\varphi} = \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2} \left(36\sin^2\varphi - 16\sin^2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= 10\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin^2\varphi d\varphi = 5\int_{\pi/3}^{\pi/2} (1 - \cos 2\varphi)\, d\varphi = 5\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\pi/3}^{\pi/2} = 5\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi\right) - 5\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{5\pi}{6} + \frac{5\sqrt{3}}{4}.$$