Пример решения задачи: повторные интегралы

Задание.

Изменить порядок интегрирования.

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int_1^e dy \int_{-1}^{-\ln y} f dx$$

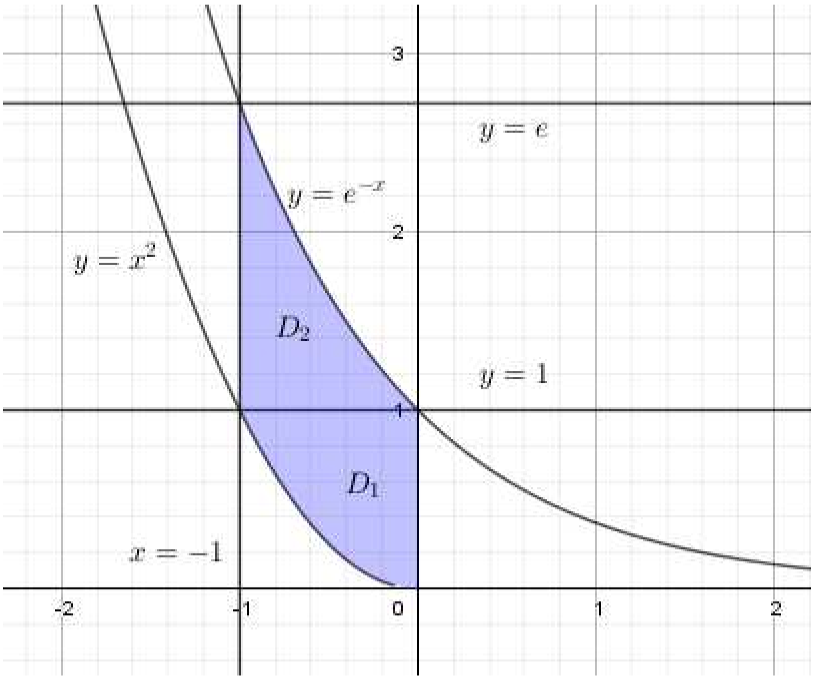
Решение.

Область интегрирования разбита на две части D_1 и D_2, которые задаются следующим образом:

$$D_1: \begin{cases} -\sqrt{y} \le x \le 0 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}; \quad D_2: \begin{cases} -1 \le x \le -\ln y \\ 1 \le y \le e \end{cases}$$

Линия $-\sqrt{y} = x$ - это левая ветка параболы $y = x^2$. Линия $x = -\ln y$ - это экспонента $y = e^{-x}$.

Изобразим эти области:



Область $D = D_1 \cup D_2$ задается следующим образом:

$$D: \begin{cases} x^2 \le y \le e^{-x} \\ -1 \le x \le 0 \end{cases}$$

Тогда интеграл примет вид:

$$\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int_{1}^{e} dy \int_{-1}^{-\ln y} f dx = \int_{-1}^{0} dx \int_{x^2}^{e^{-x}} f dy$$

Ответ.

$$\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int_{1}^{e} dy \int_{-1}^{-\ln y} f dx = \int_{-1}^{0} dx \int_{x^2}^{e^{-x}} f dy$$